長岡技術科学大学工学部編入試験 (野良) 解答集
数学

田原 喜宏*1

2024 年 2 月 28 日

*1 長岡工業高等専門学校一般教育科
tawara@nagaoka-ct.ac.jp, https://www.nagaoka-ct.ac.jp/~tawara/

目次

凡例

行列の問題において

- $\textcircled{i} \times a \to \textcircled{j}$ は i 行目を a 倍して j 行目に足す操作,
- $\textcircled{i} \to \textcircled{j}$ は i 行目を j 行目に足す操作,
- $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ は i 行目と j 行目を交換する操作とする.

1　令和 6 年度 長岡技大編入試験

問題 1　x, y を実数とする．x, y の関数 $z = x^3 - 6xy + y^3$ について下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ を求めなさい．

(2) $z_x = z_y = 0$ を満たす (x, y) をすべて求めなさい．

(3) z の極値を求めなさい．ただし, 求めた極値が極大値か極小値かも述べなさい．

問題 2　a を実数とする．行列 A とベクトル $\vec{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -a & -a & a \\ a+1 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし, 実数 x, y, z についての連立方程式を

$$(*) \qquad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$$

とする．下の問いに答えなさい．

(1) $a = 0$ として, $(*)$ を解きなさい．

(2) $a = 1$ として, $(*)$ を解きなさい．

(3) $a = -1$ として, $(*)$ を解きなさい．

問題 3　赤, 青, 緑, 黄の各色で 1 から 5 までの数字が一つずつ書かれた計 20 枚のカードがあり, ここから 3 枚のカードを同時に引く．下の問いに答えなさい．

(1) 引いた 3 枚がすべて同じ数字である確率を求めなさい．

(2) 引いた 3 枚がすべて同じ色である確率を求めなさい．

(3) 引いた 3 枚がすべて互いに異なる数字である確率を求めなさい．

問題 4　xy 平面上で $x^2 + y^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ の値を求めなさい．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D y^2\,dxdy$ の値を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D |\,y - x\,|\,dxdy$ の値を求めなさい．

1.1 解答

問題 1 (1) $\boldsymbol{z_x = 3x^2 - 6y, z_y = -6x + 3y^2, z_{xx} = 6x, z_{xy} = -6, z_{yy} = 6y}$

(2) $3x^2 - 6y = 0$, $3y^2 - 6x = 0$ であるから, $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ を解いて, $x^4 = 8x$ となり, $x = 0, 2$. これに対応して $y = 0, 2$, つまり $\boldsymbol{(x, y) = (0, 0), (2, 2)}$

(3) ヘッシアン $H(x, y) = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2 = 36xy - 36$ であるから,
$H(0, 0) < 0$ なので, $(0, 0)$ は極値とならない.
$H(2, 2) > 0$ なので, 点 $(2, 2)$ で極値を取る. このとき $z_{xx} = 12 > 0$ なので, **$\boldsymbol{(x, y) = (2, 2)}$ で極小値 $\boldsymbol{z = -8}$ を取る**.

問題 2 拡大係数行列を考えると,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -a & a & -a \\ a+1 & a & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①\times(-1)\to③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -a & a & -a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{①\times a\to②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる.

(1) $a = 0$ のとき, $x - z = 1$ であるから, $z = t$, $y = s$ とおくと, $x = t + 1$, つまり,

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{s, t}\ \textbf{は任意定数)}$$

(2) $a = 1$ のとき, $x + y - z = 1$, $x = 0$ である. これより, $y - z = 1$ が解る. $z = t$ とおくと, $y = t + 1$ つまり,

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意定数)}$$

(3) $a = -1$ のとき, $x - y + z = 1$, $y = 0$, $x = 0$ である. よって, $z = 1$ となるから,

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

問題 3 どの問題においても, 1 枚ずつ 3 回引くのと同じと考えると, 全事象は ${}_{20}\mathrm{P}_3$ である.

(1) 1 から 5 までの数字があって, 色違いでそれぞれ 4 枚ずつある. 1 枚目は何でもよく, 2 枚目は 1 枚目と同じ数で残り 3 枚, 3 枚目は 1, 2 枚目と同じ数で残り 2 枚あるから, その確率は $\dfrac{20}{20} \cdot \dfrac{3}{19} \cdot \dfrac{2}{18} = \boldsymbol{\dfrac{1}{57}}$

(2) 同じ色の数字は 5 枚であるから, 1 枚目は何でもよく, 2 枚目は 1 枚目と同じ色で残り 4 枚, 3 枚目は 1, 2 枚目と同じ色で残り 3 枚あるから, その確率は $\dfrac{20}{20} \cdot \dfrac{4}{19} \cdot \dfrac{3}{18} = \boldsymbol{\dfrac{2}{57}}$

(3) 同じ数字のカードは 4 枚ずつあるので, 1 枚目は何でもよく, 2 枚目は 1 枚目と違う数で残り 16 枚, 3 枚目は 1, 2 枚目と違う数で残り 12 枚あるから, その確率は $\dfrac{20}{20} \cdot \dfrac{16}{19} \cdot \dfrac{12}{18} = \boldsymbol{\dfrac{32}{57}}$

問題 4　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと, $D = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2} \right\}$ である.

(1)

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\theta d\theta \right) dr \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\iint_D y^2\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2\theta d\theta \right) dr \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}\end{aligned}$$

(3) $z = |y-x|$ が直線 $y = x \left(\theta = \dfrac{\pi}{4} \right)$ に関して対称であることに気を付けると,

$$\begin{aligned}\iint_D |y-x|\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 |\sin\theta - \cos\theta| d\theta \right) dr \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3}\left[\sin\theta + \cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\sqrt{2} - 1 \right)}\end{aligned}$$

2　令和 5 年度 長岡技大編入試験

問題 1　二つの袋 A, B がある．A の袋には赤球 7 個と白球 3 個が入っており, B の袋には赤球 3 個と白球 7 個が入っている．下の問いに答えなさい.

(1) A の袋の中から 2 個の球を同時に取り出すとき, どちらの球も赤球である確率を求めなさい.

(2) B の袋の中から 2 個の球を同時に取り出すとき, どちらの球も赤球である確率を求めなさい.

(3) A, B の袋のうち一つの袋を無作為に選び, 選んだ袋から 2 個の球を同時に取り出すとき, どちらの球も赤である確率を求めなさい.

(4) A, B の袋のうち一つの袋を無作為に選ぶ．選んだ袋から同時に取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったとき, 選ばれた袋が A である条件付確率を求めなさい.

問題 2　下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - 4y = e^{3x}$ の一般解を求めなさい.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = e^{3x}$ の一般解を求めなさい.

問題 3　xy 平面において領域 D を

$$D\colon 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$$

と定義する．下の問いに答えなさい.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$ を求めなさい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 r \log r \, dr$ を求めなさい.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2)dxdy$ を求めなさい.

問題 4　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ について, 下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つあげなさい．また, その P に対する $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) 2 次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{tr}(M) = a + d$ とおく．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\mathrm{tr}(A^n))}{n}$ を求めなさい.

2.1 解答

問題 1 (1) 全事象が ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りで, どちらの球も赤球となる事象は ${}_{7}\mathrm{C}_2$ 通りであるから,

$$\frac{{}_{7}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \frac{7\cdot 6}{10\cdot 9} = \boldsymbol{\frac{7}{15}}$$

(2) 全事象が ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りで, どちらの球も赤球となる事象は ${}_{3}\mathrm{C}_2$ 通りであるから,

$$\frac{{}_{3}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \frac{3\cdot 2}{10\cdot 9} = \boldsymbol{\frac{1}{15}}$$

(3) A, B をそれぞれ A の袋, B の袋を選ぶ事象, どちらも赤球である事象を R とすると,

$$P(R) = P(A)P(R \mid A) + P(B)P(R \mid B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15} = \boldsymbol{\frac{4}{15}}$$

(4) 求める確率は事象 R の条件下で A が起こる条件付確率 $P(A \mid R)$ であるから,

$$P(A \mid R) = \frac{P(A)P(R \mid A)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{15}}{\frac{4}{15}} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

問題 2 (1) $\boldsymbol{y = Ce^{4x}}$ **($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

(2) $y = ue^{4x}$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}e^{4x} + 4ue^{4x}$ となる.
これを元の微分方程式に代入して $\dfrac{du}{dx}e^{4x} = e^{3x}$ となる. つまり $\dfrac{du}{dx} = e^{-x}$. よって $u = -e^{-x} + C$.
したがって $\boldsymbol{y = -e^{3x} + Ce^{4x}}$ **($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

(3) 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

を解くと, $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$ である.
解の 1 つを $y = Axe^{3x}$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$ となる.
これを $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = e^{3x}$ に代入して,

$$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 7(Ae^{3x} + 3Axe^{3x}) + 12Axe^{3x} = -Ae^{3x} = e^{3x}$$

よって, $A = -1$. 以上から, $\boldsymbol{y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} - xe^{3x}}$ **($\boldsymbol{C_1, C_2}$ は任意定数)**

問題 3 (1) D を極座標で表すと, $D = \{\, (r, \theta) \mid 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 1 \leqq r \leqq 2 \,\}$ となる. よって,

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 r^2\cdot r dr\right)d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2 = \boldsymbol{\frac{15}{2}\pi}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_1^2 r\log r\,dr &= \left[\frac{1}{2}r^2\log r\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}rdr\\ &= 2\log 2 - \left[\frac{1}{4}r^2\right]_1^2\\ &= \boldsymbol{2\log 2 - \frac{3}{4}}\end{aligned}$$

(3) (1), (2) を利用して,

$$\begin{aligned}\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 r\log r^2\,dr\right)d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 r\log r\,dr\right)d\theta \\ &= 4\pi\left(2\log 2-\frac{3}{4}\right) \\ &= \boldsymbol{\pi\,(8\log 2-3)}\end{aligned}$$

問題 4　(1) 固有方程式を解くと,

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2-4=0$$

よって, **固有値は $\boldsymbol{\lambda=3,7}$**

$\lambda=3$ のとき, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から, $x+y=0$. これにより, $\boldsymbol{x=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ **($\boldsymbol{t}$ は任意定数)**

$\lambda=7$ のとき, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から, $x-y=0$. これにより, $\boldsymbol{x=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ **($\boldsymbol{t}$ は任意定数)**

(2) $\boldsymbol{P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$ とおくと, $\boldsymbol{P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}$

(3) $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから[*1],

$$\begin{aligned}A^n &= \left(P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n & 7^n \\ -3^n & 7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+7^n & -3^n+7^n \\ -3^n+7^n & 3^n+7^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに, $\mathrm{tr}(A^n)=3^n+7^n$ である.

[*1] この問題については別解を 82 頁, 22 で与えている.

したがって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\mathrm{tr}(A^n))}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(3^n+7^n)}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(7^n\left(1+\dfrac{3^n}{7^n}\right)\right)}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\log 7+\log\left(1+\left(\dfrac{3}{7}\right)^n\right)}{n}\\
&= \mathbf{\log 7}
\end{aligned}
$$

3 令和 4 年度 長岡技大編入試験

問題 1　平面上の直線 $y = 2x$ を ℓ とする．任意の点 P に対して, P を通る傾き 1 の直線と ℓ との交点を P$'$ とする．下の問いに答えなさい.

(1) P$(3, 2)$ に対する P$'$ の座標を求めなさい.

(2) P(X, Y) に対する P$'$ の座標を X と Y を用いて表しなさい.

(3) P を P$'$ に移す一次変換を表す行列 A を求めなさい.

(4) 前問 (3) の行列 A の固有値を固有ベクトルを求めなさい.

問題 2　下の問いに答えなさい.

(1) 極限 $L = \lim_{x \to +0} x \log x$ を求めなさい.

(2) 広義積分 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \log x dx$ を求めなさい.

(3) 広義積分 $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x}{1 - xy} dy \right\} dx$ を求めなさい.

問題 3　$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．また, 実数 t の実数値関数を成分とする 2 次元ベクトル値関数 $\vec{x} = \vec{x}(t)$ が微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$$

を満たしているとする．ただし, ベクトル値関数の微分は, 成分ごとの微分である．下の問いに答えなさい.

(1) A^2 を求めなさい.

(2) $(E - tA)^{-1} = E + tA$ であることを示しなさい.

(3) $\dfrac{d}{dt}\left(tA\vec{x}\right) = A\vec{x}$ が成り立つことを示しなさい.

(4) $\dfrac{d}{dt}\left((E - tA)\vec{x}\right) = \overrightarrow{0}$ が成り立つことを示しなさい.

(5) $(*)$の解で, $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めなさい.

問題 4　n を自然数, p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．また, 点 X が地点 A か地点 B のどちらかにあるとする．X に対し, 次の規則に従って操作を行う.

規則

- X が A にあるときは, 確率 p で X を A にとどめ, 確率 $1 - p$ で X を B に移動させる.
- X が B にあるときは, 必ず X を A に移動させる.

最初 X が A にあるとする．n 回の操作の後に X が A にある確率を a_n で表す．例えば $a_1 = p$ である．下の問いに答えなさい.

(1) a_2 を求めなさい.

(2) a_{n+1} を p と a_n を用いて表しなさい.

(3) 極限 $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めなさい.

3.1 解答

問題 1 (1) $\mathrm{P}(3,2)$ を通る傾き 1 の直線は $y-2=x-3$, $y=x-1$ である．これと ℓ との交点なので, $x=-1$, $y=-2$. したがって, $\mathbf{P'(-1,-2)}$.

(2) $\mathrm{P}(X,Y)$ を通る傾き 1 の直線は $y-Y=x-X$, $y=x-X+Y$ である．これと ℓ との交点なので, $x=-X+Y$, $y=-2X+2Y$. したがって, $\boldsymbol{\mathrm{P}'(-X+Y,-2X+2Y)}$.

(3)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -X+Y \\ -2X+2Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

なので, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

(4) 固有方程式を解くと,

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)+2 \\ &= \lambda^2-\lambda = \lambda(\lambda-1) = 0 \end{aligned}$$

固有値は $\boldsymbol{\lambda = 0, 1}$ で[*2],

$\lambda=0$ **のとき** $-x+y=0$. 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \boldsymbol{= t} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{(t \neq 0)}$

$\lambda=1$ **のとき** $-2x+y=0$. 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \boldsymbol{= s} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{(s \neq 0)}$

問題 2 (1)

$$L = \lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}$$

ロピタルの定理により,
$$= \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to+0}(-x) = \mathbf{0}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \log x dx = \lim_{\epsilon\to+0} \int_\epsilon^1 \log x dx \\ &= \lim_{\epsilon\to+0} [x\log x - x]_\epsilon^1 \\ &= -1 - \lim_{\epsilon\to+0}(\epsilon\log\epsilon - \epsilon) \end{aligned}$$

前問の結果より,
$$= \mathbf{-1}$$

[*2] 固有ベクトルの一つが $\boldsymbol{x} = {}^t(1,2)$ であるのは, 写像の定義の仕方から明らかである.

(3)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x}{1-xy} dy \right\} dx = \int_0^1 \Big[-\log(1-xy) \Big]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 (-\log(1-x)) dx
\end{aligned}
$$

ここで, $t = 1 - x$ とおくと, $dt = -dx$ となり,

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	0

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^0 (-\log t)(-dt) \\
&= \int_1^0 \log t dt \\
&= -\int_0^1 \log t dt = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

問題 3　(1) $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(2) $(E - tA)(E + tA) = E^2 - tAE + tEA - t^2A^2 = E^2 = E$ であるから, $(E - tA)^{-1} = E + tA$ □

(3)

$$
\frac{d}{dt}\left(tA\vec{x}\right) = \frac{d}{dt}t \cdot A\vec{x} + tA\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} + tA^2\vec{x} = A\vec{x} \quad \square
$$

(4)

$$
\frac{d}{dt}\left((E - tA)\vec{x}\right) = \frac{d}{dt}\vec{x} - \frac{d}{dt}(tA\vec{x}) = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0} \quad \square
$$

(5) $(*)$を変形すると, (3), (4) の結果により,

$$
\left(\frac{d}{dt} - A\right)\vec{x} = \frac{d}{dt}\left((E - tA)\vec{x}\right) = \vec{0}
$$

よって, $(E - tA)\vec{x} = \vec{x}(0)$ (定ベクトル) であるから, (2) より,

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= (E - tA)^{-1}\vec{x}(0) = (E + tA)\vec{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 3t & t \\ -9t & 1 + 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1 - t} \\ \mathbf{2 - 3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(別解) $\vec{x} = e^{At}\vec{x}(0)$ (ただし, $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}t^n$) である. また, $A^n = O$ $(n \geqq 2)$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= e^{At}\vec{x}(0) = (E + tA)\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 - 3t & t \\ -9t & 1 + 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1 - t} \\ \mathbf{2 - 3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

問題 4　(1) 1 回目では確率 $a_1 = p$ で, A にあるので, 確率 $1 - p$ で B にある. よって,

$$
a_2 = pa_1 + (1 - p) = \mathbf{1 - p + p^2}
$$

(2) n 回目で A にある確率は a_n で, B にある確率は $(1-a_n)$ であるから,

$$a_{n+1} = pa_n + (1-a_n) = \boldsymbol{(p-1)a_n+1}$$

(3) 特性方程式 $\alpha = (p-1)\alpha + 1$ を解くと, $\alpha = \dfrac{1}{2-p}$ である.

$$a_{n+1} - \frac{1}{2-p} = (p-1)\left(a_n - \frac{1}{2-p}\right)$$

であるから, $\left\{a_n - \dfrac{1}{2-p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は公比 $p-1$, 初項 $a_1 - \dfrac{1}{2-p} = \dfrac{2p-p^2-1}{2-p} = \dfrac{(p-1)^2}{p-2}$ の等比数列である.

よって, $a_n - \dfrac{1}{2-p} = \dfrac{(p-1)^2}{p-2}(p-1)^{n-1}$ となるから, 一般項は

$$a_n = \frac{(p-1)^2}{p-2}(p-1)^{n-1} + \frac{1}{2-p}$$

である.

ここで, $|p-1|<1$ なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(p-1)^2}{p-2}(p-1)^{n-1} = 0$ となる. ゆえに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2-p}}$

4　令和 3 年度 長岡技大編入試験

問題 1　正方行列を $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．また, n を自然数とする．下の問いに答えなさい．

(1) B^2, B^3 を求めなさい．

(2) AB, BA を求めなさい．

(3) A^n を n を用いて表しなさい．

(4) $n \geqq 2$ に対して, C^n を n を用いて表しなさい．

問題 2　実数 t の実数値関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ についての連立微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 6x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

を考える．また, $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．下の問いに答えなさささい．

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正方行列 P を一つあげなさい．また, $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(3) P を前問 (2) におけるものとし, 実数 t の実数値関数 $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき, $(*)$を y_1, y_2 についての連立微分方程式に書き換えなさい．また, y_1, y_2 を求めなさい．

(4) x_1, x_2 を求めなさい．

問題 3　xy 平面において, D を不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$$

で表される領域とする. 下の問いに答えなさい.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ を求めなさい.

(2) $s=x+y, t=x-y$ をとおくとき, 行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ を求めなさい.

問題 4　箱の中に 1 個の赤玉と 2 個の白玉が入っている. この箱からでたらめに 1 個の玉を取り出して, その色を確かめてから元に戻す. n を自然数として, この試行を $3n$ 回繰り返したとき, 赤玉が k 回取り出される確率を $P_k, k=0,1,\ldots,3n$ とする. 下の問いに答えなさい.

(1) P_k を n と k を用いて表しなさい.

(2) $r_k=\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$, $k=0,1,\ldots,3n-1$ とおく. r_k を n と k を用いて表しなさい.

(3) $P_{k+1}>P_k$ と $r_k>1$ が同値であることを利用して, P_k が最大となる k を求めなさい.

4.1 解答

問題 1 (1) $B^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(2) $AB = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(3) $A^n = \begin{pmatrix} \mathbf{2^n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2^n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2^n} \end{pmatrix}$

(4) 前問までの結果から, $B^k = O$ $(k \geqq 3)$, $AB = BA$ であることに気を付けると,

$$\begin{aligned} C^n &= (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^{n-k} B^k \\ &= A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} A^{n-2}B^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^{n-k} B^k}_{=O} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{2^n} & \boldsymbol{n2^{n-1}} & \boldsymbol{n(n-1)2^{n-3}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{2^n} & \boldsymbol{n2^{n-1}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 2 (1) A の固有方程式を解くと,

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(-1-\lambda) + 12 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \end{aligned}$$

よって, 固有値は $\boldsymbol{\lambda = 2, 3}$

$\lambda = 2$ **のとき** 固有ベクトルを $\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより, $2x + 3y = 0$ となるので, 固有ベクトルは,

$$\boldsymbol{x_1 = t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ (t_1 \neq 0)}$$

$\lambda = 3$ **のとき**　固有ベクトルを $\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより, $x + 2y = 0$ となるので, 固有ベクトルは,

$$\boldsymbol{x_2 = t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (t_2 \neq 0)}$$

(2) 前問より, $P = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$

(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix}$$

となる．よって, $\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\boldsymbol{\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_2 \end{cases}}$$

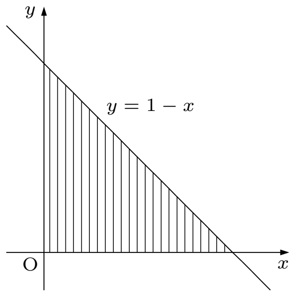
であるから, $\boldsymbol{y_1 = C_1 e^{2t}}$, $\boldsymbol{y_2 = C_2 e^{3t}}$, $\boldsymbol{(C_1, C_2}$ **は任意定数)**

(4) 前問の結果により

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t} \\ -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

であるから, $\boldsymbol{x_1 = 3C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t}}$, $\boldsymbol{x_2 = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}}$, $\boldsymbol{(C_1, C_2}$ **は任意定数)**

問題 3　(1) $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1 - x\}$ であるから,



$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} e^{x+y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [e - e^x]\, dx \\ &= [ex - e^x]_0^1 = (e - e) + 1 \\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

(2) $x = \dfrac{s+t}{2}$, $y = \dfrac{s-t}{2}$ であるから,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

(3) D を (s, t) で表すと, $D = \{(s, t) \mid 0 \leqq s \leqq 1, -s \leqq t \leqq s\}$ であるから,

$$\begin{aligned}\int_D e^{(x+y)^2} dxdy \int_D e^{s^2} |\, J \,| dsdt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-s}^{s} e^{s^2} dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 2se^{s^2} ds = \frac{1}{2} \left[e^{s^2} \right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(e - 1)}\end{aligned}$$

問題 4　(1) 赤玉が出る回数は 2 項分布 $B\left(3n, \dfrac{1}{3}\right)$ に従うので,

$$P_k = {}_{3n}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3n-k} = \boldsymbol{\frac{(3n)!2^{3n-k}}{(3n-k)!k!3^{3n}}}$$

(2)

$$\begin{aligned}r_k &= \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{(3n-k)!k!2^{3n-(k+1)}}{(3n-(k+1))!(k+1)!2^{3n-k}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3n-k}{2(k+1)}}\end{aligned}$$

(3) $r_k > 1$ となるとき, $3n - k > 2(k+1)$ なので, $3k < 3n - 2$, 即ち $k < n - \frac{2}{3}$ である. k が正の整数であることに気を付けると, $k < n$ (つまり, $k - 1 \leqq n$) で $r_k > 1 \iff P_k < P_{k+1}$ であり, $k \geqq n$ で $r_k < 1 \iff P_k > P_{k+1}$ となる. よって,

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_{n-1} < P_n > P_{n+1} > \cdots > P_{3n-1} > P_{3n}$$

したがって, **$\boldsymbol{k = n}$ のとき $\boldsymbol{P_k}$ は最大値** $\boldsymbol{\dfrac{(3n)!2^{2n}}{(2n)!n!3^{3n}}}$ をとる.

5　2020 年 (平成 32 年) 長岡技大編入試験

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき, 下の問いに答えなさい.

(1) A の固有多項式 $|tE - A|$ を求めなさい. ただし, E を 3 次単位行列とする.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

問題 2　x の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad y'' + y = \sin x$$

を考える. $u = u(x) = -y\cos x + y'\sin x$, $v = v(x) = y\sin x + y'\cos x$ とおくとき, 下の問いに答えなさい.

(1) $-u\cos x + v\sin x = y$ が成り立つことを示しなさい.

(2) u', v' を x の関数として表しなさい.

(3) u, v を x の関数として表しなさい.

(4) 微分方程式 $(*)$の一般解を求めなさい.

問題 3　xy 平面において, 領域 S, T を

$$S : x^2 + y^2 \leqq 1$$
$$T : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x$$

と定義する. 下の問いに答えなさい.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2)dxdy$ を求めなさい.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい.

問題 4　n を自然数とする. 箱 A には赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている. 箱 B には赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている. まず箱 A と箱 B をでたらめに選ぶ. 次に, 選んだ箱から復元抽出で n 回繰り返し玉を取り出す. 下の問いに答えなさい.

(1) $n = 1$ のとき, 赤玉が取り出される確率を求めなさい.

(2) n 回全てで赤玉が取り出される確率 p_n を求めなさい.

(3) n 回全てで赤玉が取り出される条件の下で $n + 1$ 回目も赤玉が取り出される条件付き確率 q_n を求めなさい.

5.1　解答

問題 1　(1)

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \overset{③\to①}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} t-2 & 0 & t-2 \\ 0 & t-3 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{①\to③}{=\!=\!=} (t-2)(t-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \boldsymbol{t(t-2)(t-3)}$$

(2) 固有値は $t(t-2)(t-3)=0$ を解いて, $\boldsymbol{t=0,2,3}$

$t=0$ **のとき**　固有ベクトルを $\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより, $x+z=0$, $y=0$ となるので, 固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (t_1 \neq 0)}$$

となる.

$t=2$ **のとき**　固有ベクトルを $\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより, $x-z=0$, $y=0$ となるので, 固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (t_2 \neq 0)}$$

となる.

$t=3$ **のとき**　固有ベクトルを $\boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これより, $2x-z=0$, $x-2z=0$ となるので, $x=z$. よって, $x=z=0$ で, y は任意の実数
固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_3 = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t_3 \neq 0)}$$

となる.

問題 2 (1)

$$\begin{aligned} -u\cos x + v\sin x &= (y\cos x - y'\sin x)\cos x + (y\sin x + y'\cos x)\cos x \\ &= y\cos^2 x - y'\cos x\sin x + y\cos x\sin x + y\sin^2 x \\ &= y(\cos^2 x + \sin^2 x) = y \quad \square \end{aligned}$$

(2)

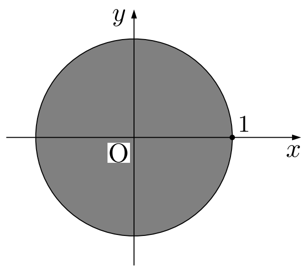
$$u' = -y'\cos x + y\sin x + y''\sin x + y'\cos x = (y+y'')\sin x = \boldsymbol{\sin^2 x}$$
$$v' = y'\sin x + y\cos x + y''\cos x - y'\sin x = (y+y'')\cos x = \boldsymbol{\sin x\cos x}$$

(3) $u' = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ なので,
$\boldsymbol{u = \dfrac{2x - \sin 2x}{4} + C_1 = \dfrac{x - \cos x\sin x}{2} + C_1}$ **(C_1は任意定数)**
$\boldsymbol{v = \dfrac{1}{2}\sin^2 x + C_2}$ **(C_2は任意定数)**
(4) (1), (3) の結果により,

$$\begin{aligned} y &= -u\cos x + v\sin x \\ &= -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x\sin x - C_1\cos x + \frac{1}{2}\sin^3 x + C_2\sin x \\ &= -C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)\sin x \\ &= A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x \\ &= \boldsymbol{A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x} \quad \textbf{(}\boldsymbol{A_1, A_2}\textbf{は任意定数)} \end{aligned}$$

[*3]

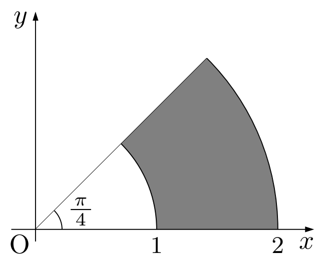
問題 3 (1) S を極座標で表示すると, $S = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ となる.
よって,



$$\begin{aligned} \iint_S (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2 \cdot r dr\right) d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

[*3] この問題においては, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を繰り返し使うことになるので気を付ける. ((4) の 2 行目から 3 行目の変形など) また, $\sin x$ の定数倍は $B\sin x$ の中に含まれることに気を付ける.

(2) T を極座標で表示すると，$T = \left\{ (r, \theta) \;\middle|\; 1 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4} \right\}$ となる．よって，



$$
\begin{aligned}
\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) d\theta \right) rdr \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{-1}(\tan\theta) d\theta \right) rdr \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \right) rdr \\
&= \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi^2}{32} = \boldsymbol{\frac{3}{64}\pi^2}
\end{aligned}
$$

問題 4 (1) 箱 A を選ぶ事象を A, 箱 B を選ぶ事象を B, n 回目に赤玉を取り出す事象を R_n とすると，

$$
\begin{aligned}
P(R_1) &= P(A \cap R_1) + P(B \cap R_1) \\
&= P_A(R_1)P(A) + P_B(R_1)P(B) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(2) $\{R_i\}$ は互いに独立である．これに気を付けると求める確率は

$$
\begin{aligned}
p_n &= P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \\
&= P((R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \cap A) + P((R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \cap B) \\
&= P_A(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)P(A) + P_B(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)P(B) \\
&= P_A(R_1)P_A(R_2)\dots P_A(R_n)P(A) + P_B(R_1)P_B(R_2)\dots P_B(R_n)P(B) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{1 + 2^n}{2 \cdot 3^n}}
\end{aligned}
$$

(3) 求める確率は $q_n = P_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1})$ である．よって，

$$
\begin{aligned}
q_n &= P_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1}) \\
&= \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n \cap R_{n+1})}{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)} \\
&= \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{1 + 2^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1}}}{\frac{1 + 2^n}{2 \cdot 3^n}} \\
&= \boldsymbol{\frac{1 + 2^{n+1}}{3(1 + 2^n)}}
\end{aligned}
$$

6　平成 31 年 長岡技大編入試験

問題 1　a, b を実数とし, 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{pmatrix}$ を考える．rank A は A の階数を表す．下の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を a, b を用いて表しなさい.

(2) 行列 A が正則になる条件を a, b を用いて表しなさい.

(3) $\mathrm{rank}\,A = 1$ となるとき, a, b を求めなさい.

問題 2　実数 t の実数値関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ に関する連立微分方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

を考える．下の問いに答えなさい.

(1) $z = x + y$, $w = x - y$ とおいて, $(*)$を z, w についての連立微分方程式に書き換えなさい.

(2) 前問 (1) で得られた連立微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) $(*)$の一般解を求めなさい.

問題 3　x, y を実数とし, 2 変数関数 $f(x, y)$ を累次積分

$$f(x, y) = \int_y^{y+1} \int_x^{x+1} (3u^2 + 3v^2)\,du dv$$

で定義する．下の問いに答えなさい.

(1) $f(x, y)$ を求め, x, y で表しなさい.

(2) $f(x, y)$ の x, y についての偏導関数 f_x, f_y および第 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めなさい.

(3) $f(x, y)$ の極値を求めなさい.

問題 4　n 人がじゃんけんをする．各人ともそれぞれ独立に, グー, チョキ, パーを等しい確率で出すものとする．あいこ (勝敗がつかない場合) になる確率を p_n とする．下の問いに答えなさい.

(1) p_2 を求めなさい.

(2) p_3 を求めなさい.

(3) p_n を求めなさい.

6.1 解答

問題 1　(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{vmatrix} \overset{①\times(-2)\to②}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a+b \\ 3 & 3a & 3 \end{vmatrix} \overset{①\times(-3)\to③}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a+b \\ 0 & 3a-3 & 3-3a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2a+b \\ 3a-3 & 3-3a \end{vmatrix} = \boldsymbol{-3(a-1)(-2a+b)}$$

(2) A が正則 $\iff |A| \neq 0$ なので, (1) より $\boldsymbol{a \neq 1}$ **かつ** $\boldsymbol{b \neq 2a}$

(3) A を行基本変形すると, (1) より,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a+b \\ 0 & 3a-3 & 3-3a \end{pmatrix}$$

なので, $\mathrm{rank}\, A = 1 \iff 3a-3=0, -2a+b=0$, つまり, $\boldsymbol{a=1, b=2}$

問題 2　(1)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

① + ② により,

$$\frac{d}{dt}(x+y) = 4x + 4y = 4(x+y) \quad \therefore \boldsymbol{\frac{dz}{dt} = 4z}$$

① − ② により,

$$\frac{d}{dt}(x-y) = 2x - 2y = 2(x-y) \quad \therefore \boldsymbol{\frac{dw}{dt} = 2w}$$

(2) $\boldsymbol{z = C_1 e^{4t}, w = C_2 e^{2t}}$, $\boldsymbol{(C_1, C_2}$ **は任意定数)**

(3) $x = \dfrac{1}{2}(z+w) = \dfrac{C_1}{2}e^{4t} + \dfrac{C_2}{2}e^{2t}$, $y = \dfrac{1}{2}(z-w) = \dfrac{C_1}{2}e^{4t} - \dfrac{C_2}{2}e^{2t}$ なので,
$\boldsymbol{x = A_1 e^{4t} + A_2 e^{2t}, y = A_1 e^{4t} - A_2 e^{2t}}$ $\boldsymbol{(A_1, A_2}$ **は任意定数)**

問題 3　(1)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_y^{y+1} \left[u^3 + 3v^2 u\right]_x^{x+1} dv = \int_y^{y+1} \left\{\left((x+1)^3 + 3v^2(x+1)\right) - (x^3 + 3v^2 x)\right\} dv \\ &= \int_y^{y+1} (3x^2 + 3x + 1 + 3v^2) dv \\ &= 3x^2 + 3x + 1 + 3y^2 + 3y + 1 \\ &= \boldsymbol{3x^2 + 3x + 3y^2 + 3y + 2} \end{aligned}$$

(2)

$$\boldsymbol{f_x = 6x + 3, \quad f_y = 6y + 3, \quad f_{xx} = 6, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6}$$

(3) $f_x = 0$, $f_y = 0$ となるのは, $x = y = -\dfrac{1}{2}$ である．また, ヘッシアンを計算すると,

$$H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36 > 0$$

であり, $f_{xx} = 6 > 0$ なので, $\boldsymbol{x = y = -\dfrac{1}{2}}$ **のとき, 極小値** $\boldsymbol{f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}}$ **を取る.**

(別解) x, y に関して 2 次関数であるから,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 3x + 3y^2 + 3y + 2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + 3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + 2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{x = y = -\dfrac{1}{2}}$ **のとき, 極小値** $\boldsymbol{f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}}$ **を取る.**

問題 4 (1) 全事象は 3^2 通りである．また 2 名でじゃんけんをして, あいこになるのは, グー, チョキ, パーを同時に出す場合の 3 通りなので,

$$p_2 = \frac{3}{3^2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) 全事象は 3^3 通りである．また, 3 名でじゃんけんをして, あいこになるのは,

(i) グー, チョキ, パーを全員が同時に出すパターンで 3 通り

(ii) 3 人がグー, チョキ, パーの全てを出すパターンで, $3! = 6$ 通り

となる．よって,

$$p_3 = \frac{3+6}{3^3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(3) 全事象は 3^n 通りある．n 名でじゃんけんをして, あいこに**ならない**のは, グー, チョキ, パーのいずれかのうち, 2 種類しか出ない場合である．これについて, どの 2 種類を出すかで ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通りで, 各々において, 全てが同じというパターンを除いた $2^n - 2$ 通りの出し方がある．ゆえに,

$$p_n = 1 - \frac{3(2^n - 2)}{3^n} = \boldsymbol{\frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}}$$

7　平成 30 年 長岡技大編入試験

問題 1　a を 1 でない実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ とする．下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次直交行列を P を 1 つあげなさい．また, $P^{-1}AP$ を求めなさい.

問題 2　x の関数 y についての微分方程式を

$$(*) \qquad xy'' + 2y' + 4xy = 0$$

とする．下の問いに答えなさい.

(1) $z = xy$ とおいて, $(*)$を z についての微分方程式として表しなさい.

(2) 前問 (1) で求めた微分方程式を解くことによって, 微分方程式 $(*)$の一般解を求めなさい.

問題 3　表に 1, 裏に 2 と書かれている硬貨がある．A さんがこの硬貨を 1 回投げて, 出た数を X とする．次に B さんがこの硬貨を 2 回投げて, 出た数の大きい方 (等しければその等しい数) を Y とする．下の問いに答えなさい.

(1) 確率 $P(X = k)$, $k = 1, 2$ と確率 $P(Y = k)$, $k = 1, 2$ とをそれぞれ求めなさい.

(2) $X > Y$ となる確率 $P(X > Y)$ と $X < Y$ となる確率 $P(X < Y)$ とをそれぞれ求めなさい.

(3) 次のようなゲームを考える．「$X > Y$ のとき, A さんは 300 点を得て, B さんは 300 点を失う．$X < Y$ のとき, B さんは n 点を得て, A さんは n 点を失う．$X = Y$ のとき, 両者とも得失点はない」このゲームで, A さんの得点の期待値 E_{A} と B さんの得点の期待値 E_{B} とをそれぞれ求めなさい.

(4) 前問 (3) のゲームが公平となる, すなわち, $E_{\mathrm{A}} = E_{\mathrm{B}}$ となるような n を求めなさい.

問題 4　a, h を正の定数とし, 関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = h - a(x^2 + y^2)$ とする．$f(x, y) \geqq 0$ で表される xy 平面における領域を D とし, その面積を S とする．また, xyz 空間で, 曲面 $z = f(x, y)$ と xy 平面で囲まれる立体の体積を V とする．下の問いに答えなさい.

(1) D を xy 平面上に図示しなさい．また, S を a と h で表しなさい.

(2) $V = \dfrac{1}{2}Sh$ であることを示しなさい.

7.1 解答

問題 1 (1) E を 2 次の単位行列とする．固有方程式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1-a \\ 1-a & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2-(1-a)^2=0$$

を解いて, $\lambda - a = \pm(1-a)$, つまり固有値は $\boldsymbol{\lambda = 1, 2a-1}$

固有値が $\lambda = 1$ **のとき** 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-a & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

つまり $(a-1)(x-y)=0$. $a \neq 1$ なので, $x-y=0$.

以上より, 固有ベクトルは $\boldsymbol{x_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ **(t は 0 でない任意の実数)**

固有値が $\lambda = 2a-1$ **のとき** 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1-a & 1-a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

つまり $(a-1)(x+y)=0$. $a \neq 1$ なので, $x+y=0$.

以上より, 固有ベクトルは $\boldsymbol{x_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ **(t は 0 でない任意の実数)**

(2) 条件を満たす P は $\boldsymbol{P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ また,

$$\boldsymbol{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix}}$$

問題 2 (1) $y = \dfrac{z}{x} = zx^{-1}$ なので, $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\cdot x^{-1} + z\cdot\dfrac{d}{dx}x^{-1} = \dfrac{dz}{dx}x^{-1} - zx^{-2} = z'x^{-1} - zx^{-2}$

同様にして,

$$y'' = z''x^{-1} - z'x^{-2} - z'x^{-2} + 2zx^{-3} = z''x^{-1} - 2z'x^{-2} + 2zx^{-3}$$

これを $(*)$ に代入して,

$$\begin{aligned} xy'' + 2y' + 4xy &= x(z''x^{-1} - 2z'x^{-2} + 2zx^{-3}) + 2(z'x^{-1} - zx^{-2}) + 4z \\ &= z'' - \cancel{2z'x^{-1}} + \cancel{2zx^{-2}} + \cancel{2z'x^{-1}} - \cancel{2zx^{-2}} + 4z \\ &= z'' + 4z = 0 \end{aligned}$$

つまり, $\boldsymbol{z'' + 4z = 0}$

(2) (1) の方程式 $z'' + 4z = 0$ を解いて, $z = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ (C_1, C_2 は任意定数)

したがって, $\boldsymbol{y} = \dfrac{z}{x} \boldsymbol{= \dfrac{C_1\cos 2x + C_2\sin 2x}{x}}$ **(C_1, C_2 は任意定数)**

問題 3　(1) X はコインの表裏がそれぞれ出る確率なので, $\boldsymbol{P(X=k)=\frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{(k=1,2)}$

$Y=1$ となるのは, 2 回ともコインが表となる場合なので, $\boldsymbol{P(Y=1)=\frac{1}{4}}$

また, $Y=2$ となるのはそれ以外なので $\boldsymbol{P(Y=2)=\frac{3}{4}}$

(2) $X>Y$ となる事象は $X=2$, $Y=1$ となる場合のみである.

確率変数 X と Y は独立であることに気を付けると,

$$P(X>Y)=P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

同様に $X<Y$ となる事象は $X=1$, $Y=2$ となる場合であるから,

$$P(X<Y)=P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(3) E_A, E_B ともに期待値の定義にもとづいて,

$$\begin{aligned}E_A&=300\cdot P(X>Y)+0\cdot P(X=Y)+(-n)\cdot P(X<Y)\\&=\frac{300}{8}-\frac{3n}{8}=\boldsymbol{\frac{300-3n}{8}}\\E_B&=-300\cdot P(X>Y)+0\cdot P(X=Y)+n\cdot P(X<Y)\\&=-\frac{300}{8}+\frac{3n}{8}=\boldsymbol{\frac{3n-300}{8}}\end{aligned}$$

(4) (3) より,

$$\frac{300-3n}{8}=\frac{3n-300}{8}$$

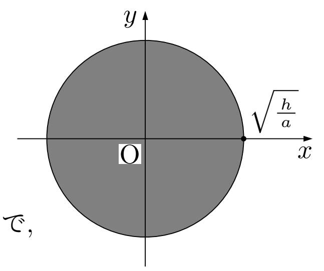
つまり, $6n=600$ なので, $\boldsymbol{n=100}$[*4]

問題 4　(1) $h-a(x^2+y^2)\geqq 0$ なので, $x^2+y^2\leqq\frac{h}{a}$

つまり, D は**中心 $(0,0)$, 半径 $\sqrt{\frac{h}{a}}$ の円周およびその内部**なので,

D は右図の塗り潰した部分. ただし境界を含む.

また, $\boldsymbol{S=\frac{\pi h}{a}}$



(2) D を極座標で表すと, $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqq r\leqq\sqrt{\frac{h}{a}},0\leqq\theta\leqq 2\pi\right\}$ なので,

$$\begin{aligned}V&=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}}(h-ar^2)rdr\right)d\theta\\&=2\pi\left[\frac{h}{2}r^2-\frac{a}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}}=2\pi\left(\frac{h^2}{2a}-\frac{h^2}{4a}\right)=\frac{\pi h^2}{2a}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi h}{a}\cdot h=\frac{1}{2}Sh\end{aligned}$$

□

[*4] 外部から点が入らず A と B の期待値が等しいのであれば当然双方とも期待値は 0 となる. また (1) での議論から B の勝率は A の 3 倍なのだから得点は $\frac{1}{3}$ とならなければならないことも直感的には明らかであることに注意されたい.

8　平成 29 年 長岡技大編入試験

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき, 下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次正方行列 P を 1 つあげなさい. また, $P^{-1}AP$ と P^{-1} を求めなさい.

(3) 自然数 n について, A^n を求めなさい.

問題 2　x の関数 y についての微分方程式

$$(*) \qquad y'' - y = e^x \sin x$$

を考える. 下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $y'' - y = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) a, b を定数として, $y = ae^x \cos x + be^x \sin x$ が微分方程式 $(*)$を満たすような a, b の値を求めなさい.

(3) 微分方程式 $(*)$の一般解を求めなさい.

問題 3　A さんは 1 から 5 までの数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードを持っている. 同様に, B さんも 1 から 5 までの数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードを持っている. A さんと B さんは, それぞれ自分のカードをでたらめに 3 枚選ぶ. A さんが選んだ数字の集合を X とし, B さんが選んだ数字の集合を Y とする. 下の問いに答えなさい.

(1) $X = \{1, 2, 3\}$ となる確率 p_1 を求めなさい.

(2) $X = Y$ となる確率 p_2 を求めなさい.

(3) $X \cap Y$ がただ 1 つの要素からなる確率 p_3 を求めなさい.

問題 4　xyz 空間における曲面 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ について下の問いに答えなさい.

(1) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 上の点 $(a, b, a^2 + b^2)$ における接平面の方程式を求めなさい. ただし, 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式は, f_x, f_y を f の偏導関数とすると,

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で与えられる.

(2) 前問の接平面が点 $(0, 0, -1)$ を通るように動くとき, 接点の軌跡を含む平面 S の方程式を求めなさい.

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 S とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい.

8.1 解答

問題 1　(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

したがって, 固有値は $\mathbf{1, 2}$

固有値が $\lambda = 1$ **のとき**　固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって, $x - y = 0$.

以上より, 固有ベクトルは $\boldsymbol{x_1 = t}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **(**t **は** 0 **でない任意の実数)**

固有値が $\lambda = 2$ **のとき**　固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって, $x = 2y$.

以上より, 固有ベクトルは $\boldsymbol{x_2 = t}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **(**t **は** 0 **でない任意の実数)**

(2) 条件を満たす P は $P = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

このとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$,

$P^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(3) $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ であるから,

$$A^n = \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = \underbrace{\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\right)\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\right)}_{n\text{ 個}}$$

$$= P\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2^{n+1}-1} & \mathbf{2-2^{n+1}} \\ \mathbf{2^n-1} & \mathbf{2-2^n} \end{pmatrix}$$

問題 2　(1) $y'' - y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 1 = 0$ を解いて $\lambda = \pm 1$.

よって $y'' - y = 0$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数)}$$

(2) $y = ae^x \cos x + be^x \sin x = e^x(a\cos x + b\sin x)$ のとき,

$$y' = e^x(a\cos x + b\sin x) + e^x(-a\sin x + b\cos x) = e^x((a+b)\cos x + (-a+b)\sin x)$$

$$y'' = e^x((a+b)\cos x + (-a+b)\sin x) + e^x(-(a+b)\sin x + (-a+b)\cos x)$$
$$= e^x(2b\cos x - 2a\sin x)$$

よって, $y'' - y = e^x((-a+2b)\cos x + (-2a-b)\sin x)$

$y'' - y = e^x \sin x$ と係数を比較して $-a+2b=0$, $-2a-b=1$.

これを解いて $\boldsymbol{a = -\frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5}}$

(3) (1), (2) より, $(*)$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{2}{5}e^x \cos x - \frac{1}{5}e^x \sin x} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数)}$$

問題 3 (1) 5 枚中 3 枚を取る試行で, $1, 2, 3$ の三枚を取る確率であるから, $p_1 = \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\frac{1}{10}}$

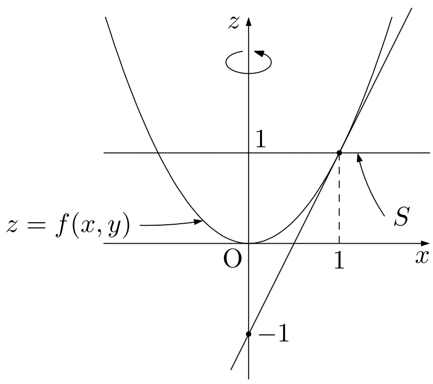
(2) 3 枚のカードの組み合わせは 10 通りあり, (1) と同様に考えて, X がどのような事象となる確率も $\frac{1}{10}$ である. どのような X に対しても $X = Y$ となる確率は $\frac{1}{10}$ であるから, $p_2 = \boldsymbol{\frac{1}{10}}$

(3) $X = \{1, 2, 3\}$ のとき, $Y = \{k, 4, 5\}$ $(k = 1, 2, 3)$ である. Y がこのような事象になる確率は $\frac{3 \cdot {}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3} = \frac{3}{10}$. X がどのような事象であっても, 問題の条件を満たす確率は同じなので $p_3 = \boldsymbol{\frac{3}{10}}$

問題 4 (1) $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ なので,

$$z - (a^2+b^2) = 2a(x-a) + 2b(y-b)$$
$$\boldsymbol{z = 2ax + 2by - (a^2+b^2)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

(2) ①が点 $(0, 0, -1)$ を通るので,



$$-1 = -(a^2+b^2)$$
$$a^2+b^2 = 1$$

このとき, 接点 $(a, b, f(a, b))$ の z 座標は

$z = f(a, b) = a^2 + b^2 = 1$.

つまり, 点 $(a, b, f(a, b))$ の軌跡は

平面 $z = 1$ と

$z = f(x, y)$ の交わる円 $\left\{(x, y, z) \mid x^2+y^2 = 1, z = 1\right\}$

である.

よって, 平面 S の方程式は $\boldsymbol{z = 1}$

(3) 平面 S と $z = f(x, y)$ のグラフの共通部分は円 $x^2+y^2 = 1$ であるから,

$D = \left\{\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ として, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと,

$D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$. よって,

$$V = \iint_D \left(1 - (x^2+y^2)\right) dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(1 - r^2\right) rdr\right) d\theta$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

9　平成 28 年 長岡技大編入試験

問題 1　n を 3 以上の整数とする．赤玉が n 個, 白玉が n 個, 合計 $2n$ 個が袋に入っている．この袋からでたらめに玉を 1 個取り出し, その玉は元に戻さない．この操作を 3 回繰り返し行い, 取り出した順に 1 列に並べ, 次の方法で得点 X を計算する．

- 「赤赤赤」と並んだ場合は $X = 2$ とする．
- 「赤赤白」または「白赤赤」と並んだ場合は $X = 1$ とする．
- それ以外の場合は $X = 0$ とする．

下の問いに答えなさい．

(1) $X = 2$ である確率 $P(X = 2)$ を求めなさい．

(2) $X = 1$ である確率 $P(X = 1)$ を求めなさい．

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めなさい．

問題 2　xy 平面において, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．x 軸上に点 $\mathrm{T}(t, 0)$, $0 < t < 1$ をとる．点 T を通る直線 ℓ と円 C との交点を A, B とする．ただし, 直線 ℓ は点 O を通らないとする．$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とするとき, 次の問いに答えなさい．

(1) 直線 ℓ と点 O の距離を h とするとき, h の取りうる値の範囲を t で表しなさい．

(2) 前問の h を用いて S を表しなさい．

(3) S の最大値 $f(t)$ を t で表しなさい．

問題 3　微分方程式

$$(*) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

を考える．$x = e^t$ とするとき, 下の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dt}$ を, $\dfrac{dy}{dx}$ と x で表しなさい．

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ と $\dfrac{dy}{dx}$ と x で表しなさい．

(3) 微分方程式 $(*)$の一般解を求めなさい．

問題 4　xy 平面において, 連立不等式 $\sqrt{y} \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ で表される領域が D であるような $f(x)$ を求めなさい．

(3) 積分順序の変更をして, 重積分 $V = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1 + x^3}\,dxdy$ を求めなさい．

9.1 解答

問題 1 (1) $X=2$ となるのは 1 回目に $2n$ 個あるなかから n 個の赤のいずれかを引き, 次いで 2 回目に $2n-1$ 個あるなかから $n-1$ 個の赤のいずれかを引き, 最後に $2n-2$ 個あるなかから $n-2$ 個の赤のいずれかを引く事象であるから,

$$P(X=2)=\frac{n}{2n}\cdot\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{n-2}{2n-2}=\boldsymbol{\frac{n-2}{4(2n-1)}}$$

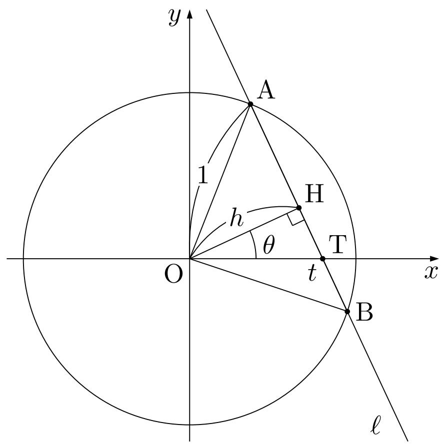
(2) (1) と同様に考えて,「赤赤白」と「白赤赤」となる事象が排反であることに気を付けると,

$$P(X=1)=\frac{n}{2n}\cdot\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{n}{2n-2}+\frac{n}{2n}\cdot\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{n-1}{2n-2}=\boldsymbol{\frac{n}{2(2n-1)}}$$

(3) X が取り得る値は $0,1,2$ のみなので, $P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)$ となる. ゆえに

$$\begin{aligned}E(X)&=1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+0\cdot P(X=0)\\&=\frac{n}{2(2n-1)}+\frac{2(n-2)}{4(2n-1)}=\frac{4(n-1)}{4(2n-1)}=\boldsymbol{\frac{n-1}{2n-1}}\end{aligned}$$

問題 2 (1) 右図のように, 原点から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とおくと, $\mathrm{OH}=h$ となる. また $\angle\mathrm{HOT}=\theta$ とおくと, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.
故に $0<\cos\theta\leqq 1$.
$h=t\cos\theta$ であるから, $\boldsymbol{0<h\leqq t}$.



(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ において, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ であるから, $\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}=2\sqrt{1-h^2}$ である. 故に $\boldsymbol{S=h\sqrt{1-h^2}}$.

(3) $S=S(h)$ とおく.

$$S'(h)=\sqrt{1-h^2}-\frac{h^2}{\sqrt{1-h^2}}=\frac{1-2h^2}{\sqrt{1-h^2}}$$

よって, $h>0$ を踏まえて
$S'(h)=0 \iff h=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
故に S の増減表を書くと, 次のようになる.

$0<t<\frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合

h	0	$\cdots$	t	$\cdots$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$S'(h)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$S(h)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq t<1$ の場合

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	t
$S'(h)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(h)$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$

したがって,
$0<t<\frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合　S の最大値は $h=t$ のとき $S=t\sqrt{1-t^2}$,

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < 1$ の場合　S の最大値は $h = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $S = \dfrac{1}{2}$.
これらを纏めて,

$$\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} t\sqrt{1-t^2} & \left(0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < 1\right) \end{cases}}$$

問題 3　(1) $\dfrac{dx}{dt} = e^t = x$ であることに気を付けると, 合成関数の微分法から

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = e^t \frac{dy}{dx} = \boldsymbol{x\frac{dy}{dx}}$$

(2) (1) の結果と積の微分法を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &= e^t \frac{dy}{dx} + x\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \boldsymbol{x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}} \end{aligned}$$

(3) (1), (2) の結果から,

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y &= \left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right) + 3x\frac{dy}{dx} + 2y \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

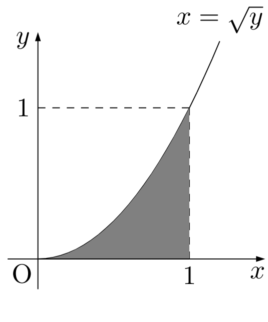
④の特性方程式を解いて, $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1) = 0$, $\lambda = -2, -1$.
故に $\boldsymbol{y} = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} = \boldsymbol{C_1x^{-2} + C_2x^{-1}}$ **($\boldsymbol{C_1, C_2}$ は任意定数)**

(3) の別解　$(*)$ の解の 1 つを $y = x^\alpha$ と予想すると,[*5] $\dfrac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y &= x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 4x\alpha x^{\alpha-1} + 2x^\alpha \\ &= (\alpha^2 + 3\alpha + 2)x^\alpha = (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha = 0 \end{aligned}$$

よって $\alpha = -2, -1$, つまり $y = x^{-2}, y = x^{-1}$ は $(*)$ の解の 1 つである.
故に $\boldsymbol{y = C_1x^{-2} + C_2x^{-1}}$ **($\boldsymbol{C_1, C_2}$ は任意定数)**

問題 4　(1) D は右図の塗り潰した部分. ただし, 境界線を含む.



(2) (1) の図より $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

(3) (1), (2) の結果より

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3}\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^3)^{\frac{1}{2}}(1+x^3)'\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)} \end{aligned}$$

[*5] 一般に 2 階微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ において $\alpha(\alpha-1) + \alpha xP(x) + x^2Q(x) = 0$ が成立するとき, $y = x^\alpha$ は解の 1 つであり, $\alpha^2 + \alpha P(x) + Q(x) = 0$ が成立するとき, $y = e^{\alpha x}$ は解の 1 つである. おおよそであるが, y'', y', y の係数となる式の次数が 1 つずつ下がっていけば $y = x^\alpha$, 次数が同じであれば $y = e^{\alpha x}$ と予想する. ただし, α が複素数のとき, x^α の表示はかなり面倒となる. $x = e^t$ とおくと, Euler の公式によりその面倒さを軽減することができる. また, $x^2y'' + axy' + by = 0$ の形で表される微分方程式は Euler の微分方程式と呼ばれる.

10　平成 27 年 長岡技大編入試験

問題 1　2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 下の問いに答えなさい.

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい

(2) 曲線 $C : 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ の A による像 C' の方程式を求め, C' の概形を図示しなさい.

問題 2　微分方程式

$$(*) \qquad y\frac{dy}{dx} + y^2 = e^x$$

について, 下の問いに答えなさい

(1) $z = y^2$ とおいて, 微分方程式 $(*)$ を z と x に関する微分方程式として表しなさい.

(2) 前問 (1) の微分方程式を解くことによって, 微分方程式 $(*)$ を解きなさい.

問題 3　関数 $y = \sin x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれる図形を S とする. 下の問いに答えなさい.

(1) 図形 S を図示し, 面積を求めなさい.

(2) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(3) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

問題 4　数直線上の動点 Q が次の規則に従って移動している. ただし n は 0 以上の整数とする.

規則: 時刻 n で Q の座標が a のとき, 時刻 $n+1$ で Q は $a+1, a-1$ のいずれかにそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する.

時刻 0 で Q が原点にあるものとしたとき, 下の問いに答えなさい.

(1) 時刻 2 で Q が原点にある確率を求めなさい.

(2) 時刻 4 で Q が原点にある確率を求めなさい.

(3) 時刻 $2n$ で Q が原点にある確率を n で表しなさい.

10.1 解答

問題 1　(1) $A^{-1}=\dfrac{1}{2\cdot1-1\cdot1}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

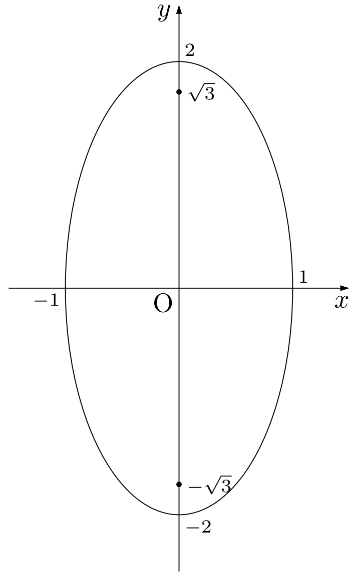
(2) C' 上の点を $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ とおく.

条件より $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ であるから, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2X-Y\\-X+Y\end{pmatrix}$

よって, $x=2X-Y, y=-X+Y$. これを C の方程式に代入して,

$$
\begin{aligned}
&5(2X-Y)^2+12(2X-Y)(-X+Y)\\
&\ +8(-X+Y)^2-4\\
=&(20X^2-20XY+5Y^2)\\
&\ +(-24X^2+36XY-12Y^2)\\
&\ +(8X^2-16XY+8Y^2)-4\\
=&4X^2+Y^2-4=0\\
&\therefore\ X^2+\frac{Y^2}{4}=1
\end{aligned}
$$

文字を直して, $\boldsymbol{x^2+\dfrac{y^2}{4}=1}$



これは短軸は x 軸上にあり長さ 2, 長軸は y 軸上にあり長さ 4 の楕円である. 焦点の座標は $(0,\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3})$ であり, C' の概形は右図の通り.

問題 2　(1) $z=y^2$ とおくと, $\dfrac{dz}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx}$ である. 故に $y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{dz}{dx}$.

これと $z=y^2$ を $(*)$ に代入して $\boldsymbol{\dfrac{dz}{dx}+2z=2e^x}$ となる.[*6]

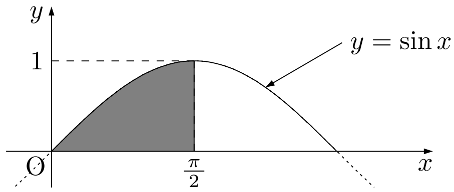
(2) 前問 (1) の微分方程式を解く. これは 1 階線形微分方程式であるから, 公式により

$$
\begin{aligned}
z&=e^{-\int 2dx}\left\{\int e^{\int 2dx}2e^x dx+C\right\}\\
&=e^{-2x}\left\{\int e^{2x}2e^x dx+C\right\}\\
&=e^{-2x}\left\{\frac{2}{3}e^{3x}+C\right\}\\
&=\frac{2}{3}e^x+Ce^{-2x}
\end{aligned}
$$

となる. 故に $z=y^2$ から $(*)$ の一般解は $\boldsymbol{y^2=\dfrac{2}{3}e^x+Ce^{-2x}}$ **(C は任意定数)**.

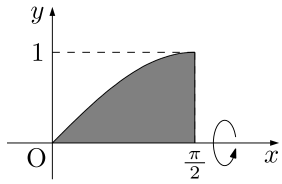
[*6] この形の微分方程式は Bernoulli 形の微分方程式と呼ばれており, 一般に $y'+P(x)y=Q(x)y^n$, $(n\neq0,1)$ は $z=y^{1-n}$ とおくことにより, $z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ という一階線形微分方程式に帰着することができる.

問題 3 (1) S は右図の塗り潰した部分．ただし，境界を含む．また，求める面積を S_1 とおくと，



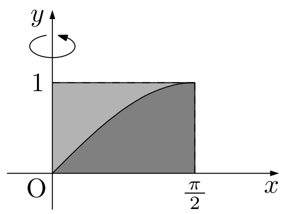
$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$$

(2) 求める体積を V_1 とおくと，



$$\begin{aligned}V_1&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx\\&=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

(3) 求める体積を V_2 とおくと，V_2 は半径 $\dfrac{\pi}{2}$ の y 軸を中心とする高さ 1 の円柱から $x=\sin^{-1}y$ のグラフと直線 $y=1$ および y 軸によって囲まれた図形 (図のうち，塗りつぶしのうすい部分) を y 軸中心に回転した回転体を除いたものである．よって，



$$V_2=\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi\int_0^1 x^2dy$$

である．ここで，$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ であるから，$dy=\cos xdx$ であり，[*7]

y	0	$\rightarrow$	1
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

となる．

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2dy&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos xdx=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin xdx\\&=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=\frac{\pi^2}{4}-2\left(\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right)\\&=\frac{\pi^2}{4}-2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2\end{aligned}$$

よって，$V_2=\pi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2-\pi\displaystyle\int_0^1 x^2dy=\dfrac{\pi^3}{4}-\pi\left(\dfrac{\pi^2}{4}-2\right)=\boldsymbol{2\pi}$

[*7] そのまま計算するには $\int_0^1\left(\sin^{-1}y\right)^2dy$ を求める必要があるが，これは明らかに計算が煩雑である．因みにそのまま計算すれば不定積分は $\int\left(\sin^{-1}y\right)^2dy=y(\sin^{-1}y)^2+2\sqrt{1-y^2}\sin^{-1}y-2y$ となる．

問題 4　この動点 Q の毎回の動きはベルヌーイ試行であるから, 時刻 n で, Q が $+1$ の方向に動く回数は二項分布 $B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ に従う. 故に時刻 n までに $+1$ の方向に k 回動く確率を $P_n(\{k\})$ とおくと,

$$P_n(\{k\}) = {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{2^n}$$

である.

(1) 問題の事象は時刻 2 までに $+1$ の方向に 1 回動く事象なので, 求める確率は

$$P_2(\{1\}) = \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{2^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) (1) 同様, 問題の事象は時刻 4 までに $+1$ の方向に 2 回動く事象なので, 求める確率は

$$P_4(\{2\}) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2^4} = \frac{6}{16} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(3) (1), (2) 同様, 問題の事象は時刻 $2n$ までに $+1$ の方向に n 回動く事象なので, 求める確率は

$$P_{2n}(\{n\}) = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n}} = \boldsymbol{\frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}}}$$

11　平成 26 年 長岡技大編入試験

問題 1　袋の中に赤玉 m 個と白玉 n 個が入っている．この袋からでたらめに 1 個の玉を取り出す．取り出した玉は元に戻さない．この操作を繰り返し行ったとき, 先に赤玉がなくなる確率を $P(m,n)$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) $P(1,2)$ を求めなさい．

(2) $P(2,3)$ を求めなさい．

(3) 一般の m,n に対して, $P(m,n)$ を m,n で表しなさい．

問題 2　下の問いに答えなさい．

(1) α を定数, x を未知数とする方程式

$$\alpha x + 3x = 0$$

が $x = 0$ 以外の解を持つような α の値を求めなさい．

(2) α を定数, x, y を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ 2x + (\alpha - 1)y = 0 \end{cases}$$

が $x = y = 0$ 以外の解を持つような全ての α の値を求め,
それぞれの α に対する $x = y = 0$ 以外の解 (x,y) を 1 つずつ求めなさい．

問題 3　微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

を考える．下の問いに答えなさい．

(1) $z = \dfrac{y}{x}$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx}$ を z, $\dfrac{dz}{dx}$, x で表しなさい．

(2) 微分方程式 $(*)$ を z と x に関する微分方程式として表しなさい．

(3) 前問 (2) の微分方程式を解くことによって, 微分方程式 $(*)$ を解きなさい．

問題 4　xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える．$\mathrm{A}(r,0)$ とし, 円周上に点 B を $\angle\mathrm{AOB} = 30^\circ$ になるようにとる．下の問いに答えなさい．

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい．

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい．

11.1　解答

問題 1　(1) これは 3 回取り出す試行において, 1 つの赤玉を 1 回目または 2 回目に取り出す確率である.

(イ) 1 回目に取り出す確率は $\dfrac{1}{3}$ である.

(ロ) 2 回目に取り出す確率は 1 回目に白玉を取り出し, 残り 2 個の中から赤玉を取り出す確率であるので, $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

この 2 つの事象は排反事象であるから, $P(1,2)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) これは合計 5 回取り出すという試行において, 4 回目までに全ての赤玉を取り出す事象の起こる確率である[*8].

赤玉を●, 白玉を○で表し, 出た順に左から並べることを考える.

●○○●○や○○●●○などを考えると

この試行における全事象は「5 個並べる中に 2 個ある赤玉をどこに並べるか」と考えられるので, ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りある.

同様に 4 回目までに 2 つの赤玉全てを取り出す事象は「4 個並べる中に 2 個ある赤玉をどこに並べるか」ということで ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある.

故に

$$P(2,3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

(3) 前問 (2) と同じ考え方で, $m+n$ 回取り出す試行のうち, $m+n$ 回目に白玉を取り出す確率を考えれば良い.

まず全事象は「$m+n$ 個並べる中に m 個ある赤玉をどこに並べるか」で ${}_{m+n}\mathrm{C}_m$ 通りある. その内, $m+n-1$ 回目までに m 個の赤玉を全て並べる事象は, ${}_{m+n-1}\mathrm{C}_m$ 通りある. よって,

$$P(m,n)=\frac{{}_{m+n-1}\mathrm{C}_m}{{}_{m+n}\mathrm{C}_m}=\frac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}{\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}}=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}\cdot\frac{m!\cdot n!}{(m+n)!}=\boldsymbol{\frac{n}{m+n}}$$

問題 1 の別解) 先の解答はやや煩雑な計算であるが, 実は解釈を考えれば非常に簡単である[*9]. まず, 「先に赤玉全てを取り出す確率」は結局のところ「最後の 1 個に白玉を取り出す確率」であることに気を付ける. この事象は,

$$●○○●○\cdots●○○,\quad ●○●○●\cdots○●○$$

などの並びと考えられる (右端を最後の 1 個と捉えている). この並びを逆から見てみると, 1 個目が白玉であるような事象と同じ数だけ並べ方が存在することが解る. つまりこれは 1 回目に $m+n$ 個の玉の中から, n 個ある白玉のうち 1 つを取り出す確率と等しい[*10]ので, $P(m,n)=\dfrac{n}{m+n}$ となる.

[*8] (1) と同じ考えでも良いのだが, 相当煩雑になる.

[*9] 実は筆者が先に思い付いたのは別解の方法であった

[*10] この解釈が腑に落ちるかどうかがこの別解を理解するポイントである. なお, 解説を 81 頁で述べる

問題 2　(1) $\alpha x + 3x = (\alpha+3)x = 0$ で, $x \neq 0$ が解となるのは, $\alpha + 3 = 0$, つまり $\alpha = \mathbf{-3}$ のとき.

(2) 方程式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式が非自明な解を持つ必要十分条件は係数行列の行列式が 0 のときである. 故に

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-1) - 2 = \alpha^2 - \alpha - 2 = (\alpha-2)(\alpha+1) = 0$$

つまり $\alpha = \mathbf{2, -1}$ のとき.

$\alpha = 2$ **のとき**　方程式はどちらも $2x+y=0$ であるから, その解として $\boldsymbol{x = 1, y = -2}$ を取れる.

$\alpha = -1$ **のとき**　方程式は $-x+y=0, 2x-2y=0$, つまり何れも $x - y = 0$ に帰着される. 故にその解として $\boldsymbol{x = y = 1}$ を取れる.

問題 3　(1) $z = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y = zx$ であるから, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \cdot x + z \cdot \dfrac{dx}{dx} = \boldsymbol{x\dfrac{dz}{dx} + z}$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2 - x^2) \cdot \frac{1}{x^2}}{2xy \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}} = \frac{z^2 - 1}{2z}$$

よって, (1) と併せて $(*)$ は z と x に関する微分方程式で表すと $x\dfrac{dz}{dx} + z = \dfrac{z^2-1}{2z}$.

これを変形して $\boldsymbol{x\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{z^2+1}{2z}}$

(3) (2) より $x\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{z^2+1}{2z}$. この微分方程式は変数分離形であるから,

$$\frac{2z}{z^2+1}dz = -\frac{1}{x}dx,$$
$$\int \frac{2z}{z^2+1}dz = -\int \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{(z^2+1)'}{z^2+1}dz = -\int \frac{dx}{x}$$

即ち $\log(z^2+1) = -\log|x| + c$　(c は任意定数)

両辺の指数を取って

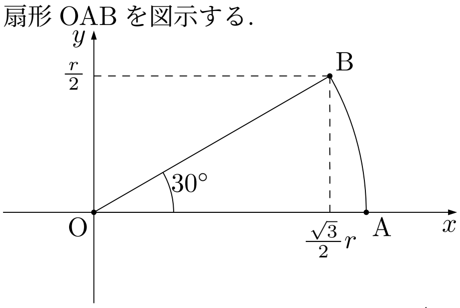
$$z^2 + 1 = \frac{\pm e^c}{x}$$

$z = \dfrac{y}{x}$ を代入して

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{\pm e^c}{x}$$

したがって, $\boldsymbol{x^2 + y^2 = Cx}$　(**C は任意定数**)

問題 4　扇形 OAB を図示する.



(1) 直線 OB の方程式は $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$,

円弧 AB の方程式は $y = \sqrt{r^2 - x^2} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r \leqq x \leqq r\right)$ であるから, 求める回転体の体積は

$$
\begin{aligned}
V(r) &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 dx + \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\
&= \frac{\pi}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} x^2 dx + \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} (r^2 - x^2) dx \\
&= \frac{\pi}{3} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} + \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} \\
&= \frac{\pi}{9} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} r^3 + \pi \left\{\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} r^3\right)\right\} \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{24}\right) \pi r^3 \\
&= \boldsymbol{\frac{2 - \sqrt{3}}{3} \pi r^3}
\end{aligned}
$$

(2) 円弧 AB の方程式 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ について, $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

よって, $1 + (y')^2 = 1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2} = \dfrac{r^2}{r^2 - x^2}$.

したがって, 曲面の面積は

$$
\begin{aligned}
S(r) &= 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} r dx \\
&= 2\pi r \left(r - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \\
&= \boldsymbol{(2 - \sqrt{3}) \pi r^2}
\end{aligned}
$$

12 平成 25 年 長岡技大編入試験

問題 1　n を 2 以上の自然数とする．袋の中に $1, 2, \ldots, n$ と書いたボールが 1 つずつある．ここから 2 個取り出して, 出た順にその数字を X, Y とする．また, X と Y の大きい方を Z とする．以下の問いに答えなさい.

(1) $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して確率 $P(X = k)$, および期待値 $E(X)$ を求めなさい.

(2) $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して確率 $P(Z = k)$, および期待値 $E(Z)$ を求めなさい.

問題 2　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ と 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ についての方程式 $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように, k を定めなさい.

(3) 前問で定めた k について, $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ の解のうちで, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と垂直なものを求めなさい.

問題 3　空間に半径 r の球が 2 つある．これらが共有点を持つとし, 中心の間の距離を $2s$ とする．以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの球の共通部分の体積 V を r, s で表しなさい.

(2) $s = r^2$ の条件を満たして r, s が動くとき, V を最大にする r の値を求めなさい.

問題 4　以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-2x}$ を解きなさい.

(2) 2 変数関数 $z(x, y) = f(x)e^{-2y}$ が偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2(x+y)}$$

の解になるような, 2 回微分可能な関数 $f(x)$ を求めなさい.

12.1 解答

問題 1　(1) n 個のボールのうちから, ただ 1 つの k と書いてあるボールを取り出す確率なので,
$P(X=k)=\boldsymbol{\frac{1}{n}}$.
また, 期待値の定義により,

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

(2) $k=1$ となる確率は 0 であることに注意する.
$Z=k$ とは, $X=k$ かつ, $Y\leqq k-1$ となるか, または $X\leqq k-1$ かつ, $Y=k$ となる事象である.
前者と後者が排反事象であることに気を付けると,
$P(Z=k)=P(X=k,Y\leqq k-1)+P(X\leqq k-1,Y=k)$ である.
(i) $X=k$ かつ, $Y\leqq k-1$ となる確率は, $\frac{1}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}=\frac{k-1}{n(n-1)}$
(ii) $X\leqq k-1$ かつ $Y=k$ となる確率は, $\frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{k-1}{n(n-1)}$ [*11]
よって, $\boldsymbol{P(Z=k)=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}}$. また, 期待値は,

$$\begin{aligned}E(Z)&=\sum_{k=1}^{n}kP(Z=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-2k}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k)\\&=\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)\right)\\&=\frac{n+1}{n-1}\left(\frac{1}{3}(2n+1)-1\right)=\frac{(n+1)}{3(n-1)}(2n+1-3)\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}(n+1)}\end{aligned}$$

問題 2　(1) $\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\1&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&-2\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$
ただし, 最初の等号は 1 行目 $\times(-1)$ を 2, 3 行目に足し, 次の等号は行列を 1 列目について展開した.

(2) 拡大係数行列を考えると,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\1&2&1&1\\1&0&-3&k\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&-1&-2&k-2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&k-3\end{array}\right)$$

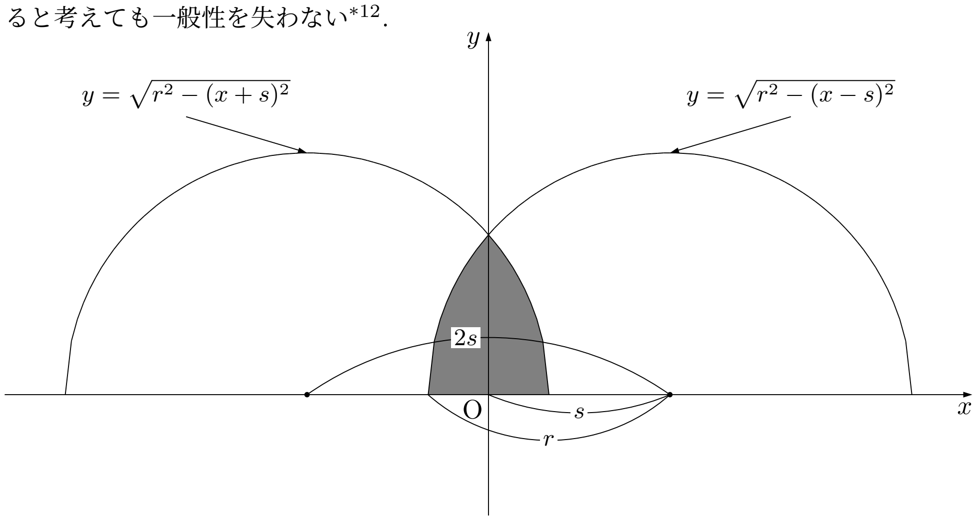
ただし, 最初に 1 行目 $\times(-1)$ を 2, 3 行目に足し, 次に 2 行目を 3 行目に足した. 係数行列と拡大

[*11] 実は前者と後者で確率が同じなのは当然である. 例えば 2 名でボールを取って大きい数字が勝ち, というゲームは 1 人目が小さい値を取れば, 2 人目が勝ち易くなり, 1 人目が大きい値を取れば, 2 人目が負け易くなる. このバランスで結局このゲームはどちらにも公平な条件となっている. 同様の問題が平成 26 年問題 1 にも出題されている.

係数行列のランクが等しくなることが解が存在する必要十分条件であるので, $k-3=0$, すなわち $\boldsymbol{k=3}$

(3) (2) より $k=3$ のとき $x+y-z=2$, $y+2z=-1$ であるから, $z=t$ とおくと, $y=-2t-1$, $x=-y+z+2=-(-2t-1)+t+2=3t+3$. よって, 解は $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}3t+3\\-2t-1\\t\end{pmatrix}$. これが, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ と垂直なので, $\boldsymbol{p}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(3t+3)+(-2t-1)+t=2t+2=0$. よって $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

問題 3　(1) 2 球を下図の円弧 $y=\sqrt{r^2-(x-s)^2}$ と $y=\sqrt{r^2-(x+s)^2}$ を x 軸中心に回転した回転体であると考えても一般性を失わない[*12].



よって, 求める体積は, 図の塗り潰した部分を x 軸中心に回転したものの体積である. この図形が y 軸に関して対称な図形であることに気を付ければ,

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_{s-r}^{0}\left\{\sqrt{r^2-(x-s)^2}\right\}^2dx+\pi\int_{0}^{r-s}\left\{\sqrt{r^2-(x+s)^2}\right\}^2dx\\
&=2\pi\int_0^{r-s}(r^2-(x+s)^2)dx=2\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}(x+s)^3\right]_0^{r-s}\\
&=2\pi\left[\left(r^2(r-s)-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(0-\frac{1}{3}s^3\right)\right]\\
&=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi\left(2r^3-3r^2s+s^3\right)}
\end{aligned}
$$

(2) 共有点を持つという条件より $r\geqq s$ である. 故に $s=r^2$ のとき, $r\geqq r^2$. したがって $0<r\leqq 1$ であることに気を付ける. $V=V(r)$ とおくと, (1) より,

$$
\begin{aligned}
V(r)&=\frac{2}{3}\pi(2r^3-3r^2\cdot r^2+(r^2)^3)=\frac{2}{3}\pi(r^6-3r^4+2r^3)\\
\therefore\ \frac{3}{2\pi}V'(r)&=6r^5-12r^3+6r^2=6r^2(r^3-2r+1)\\
&=6r^2(r-1)(r^2+r-1)
\end{aligned}
$$

[*12] 座標の取り方は色々で, $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と $y=\sqrt{r^2-(x-2s)^2}$ という取り方もある. 筆者も最初はこの置き方にしたが, 積分の計算が煩雑となったため, 解答の手法に落ち着いた. とは言え, 試験の場合, 最初の方法で我武者羅に解いて行く方が結局早いということもある. 平素から問題演習を積み, 効率的な解法を見抜くことと計算の速度を身に付けることが肝心である.

よって, $V'(r)=0$ となるのは $r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1$ のとき. V の増減表を書くと, 次のようになる.

r	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1
V'	0	$+$	0	$-$	0
V		$\nearrow$		$\searrow$	

よって, V が最大となるのは $\boldsymbol{r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ のとき.

問題 4 (1) 斉次方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ を解くと, 特性方程式 $\lambda^2+4=0$ により, $\lambda=\pm 2i$.
よって, $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ となる.
$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=e^{-2x}$ の解の 1 つを $y=Ae^{-2x}$ と予想すると, $4Ae^{-2x}+4Ae^{-2x}=e^{-2x}$.
よって, $A=\dfrac{1}{8}$. したがって, 求める一般解は

$$\boldsymbol{y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}e^{-2x}} \quad \textbf{(ただし, } \boldsymbol{C_1, C_2} \textbf{ は任意定数)}$$

(2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)e^{-2y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4f(x)e^{-2y}$$

であるから,

$$f''(x)e^{-2y}+4f(x)e^{-2y}=e^{-2x}\cdot e^{-2y},$$
$$e^{-2y}(f''(x)+4f(x))=e^{-2y}\cdot e^{-2x}.$$

すなわち, $f''(x)+4f(x)=e^{-2x}$ である. したがって, (1) より,

$$\boldsymbol{f(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}e^{-2x}} \quad \textbf{(ただし, } \boldsymbol{C_1, C_2} \textbf{ は任意定数)}$$

13 平成 24 年 長岡技大編入試験

問題 1　1 つのさいころを 6 の目が出るまで投げ続け, 投げた回数を X とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) 確率 $P(X=1)$, $P(X=2)$ を求めなさい.

(2) 自然数 n に対して, 確率 $P(X=n)$ を求めなさい.

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めなさい.

問題 2　xy 平面において, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域を D とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) D の概形をかき, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\iint_D x\,dx\,dy$ を求めなさい.

問題 3　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) 実数 x, y, s, t に対して,

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

が成り立つとき, s, t を x, y で表しなさい.

(3) 前問で得られた式を $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す行列を求めなさい.

問題 4　以下の問いに答えなさい.

(1) $u(t)$ に関する常微分方程式 $t\dfrac{du}{dt} - u = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) $f(t)$ を微分可能な関数とする. 2 変数関数 $z(x,y) = f(x^2y^3)$ が偏微分方程式

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - 5z = 0$$

の解になるような, $f(t)$ および $z(x,y)$ を求めなさい.

13.1　解答

問題 1　(1) $X=1$ となる事象はさいころを振って 1 回目に 6 の目が出る事象なので, $P(X=1)=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

$X=2$ となる事象は 1 回目に 6 以外, 2 回目に 6 の目が出る事象なので, $P(X=2)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(2) $X=n$ となる事象は $n-1$ 回目まで 6 以外, n 回目に 6 の目が出る事象なので,

$$P(X=n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{5^{n-1}}{6^n}}$$

(3) X の期待値 $E(X)$ は,

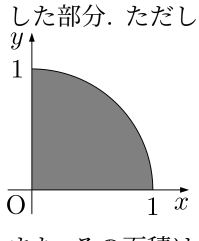
$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{5^{n-1}}{6^n}$$

であるから[*13],

$$\begin{aligned}E(X)-\frac{5}{6}E(X)&=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{5^{n-1}}{6^n}-\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{5^{n-1}}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{5^{n-1}}{6^n}-\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{5^n}{6^{n+1}}\\&=\left(1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{5}{6^2}+3\cdot\frac{5^2}{6^3}+\cdots+n\cdot\frac{5^{n-1}}{6^n}+\cdots\right)\\&\qquad-\left(1\cdot\frac{5}{6^2}+2\cdot\frac{5^2}{6^3}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{5^{n-1}}{6^n}+n\cdot\frac{5^n}{6^{n+1}}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5^2}{6^3}+\cdots+\frac{5^{n-1}}{6^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\\&=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}}=1\end{aligned}$$

したがって, $E(X)=\mathbf{6}$ [*14]

問題 2　(1) D は原点中心半径 1 の円の円周及び内部のうち, 第 1 象限にあるものなので, 概形は下図の塗り潰した部分. ただし, 境界を含む.



また, その面積は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ である.

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと,

$$\begin{aligned}D&=\left\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geqq 0, x^2+y^2\leqq 1\right\}\\&=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq 1, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}.\end{aligned}$$

---

*13 全事象は可算無限個の要素を含んでいることに注意せよ. いつまで経っても 6 の目が出ない確率は 0 であるが, その事象は空事象では無い. 即ち「起こり得ない」が「存在しない」事象ではない.

*14 数列 $a_n=b_n\cdot ar^{n-1}$(b_n は等差数列) の第 n 項までの和 S_n を計算するには, S_n-rS_n を計算すれば良い. (詳しくは 81 頁を参照のこと) また, 答えが 6 となるのは「6 回振ればまず 1 回は 6 の目が出るだろう」という直感にも反していない.

よって[*15],

$$\iint_D xdxdy = \iint_D r\cos\theta r dr d\theta = \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 \cdot \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

問題 3　(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 3 = \mathbf{0}$$

(2)

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．よって,

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり,

$$\begin{cases} s = 2x + 2y \\ 2s + t = 5x + 3y \\ s + 2t = 4x \end{cases}$$

これらを解くと, $2t = 4x - s = 4x - (2x + 2y) = 2x - 2y$. よって, $\boldsymbol{s = 2x + 2y, t = x - y}$. これは上の方程式の全てを満たしているので正しい[*16].

(3) (2) より,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

よって, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

問題 4　(1) $t\dfrac{du}{dt} - u = 0$ を変形すると, $\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$. よって,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u}\frac{du}{dt}dt &= \int \frac{1}{t}dt \\ \log|u| &= \log|t| + c = \log|e^c t|, \\ u &= \pm e^c t \quad (c \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

$\pm e^c = C$ とすれば, 一般解 $\boldsymbol{u = Ct}$ **($\boldsymbol{C}$ は任意定数)** を得る.

[*15] 一般に 2 変数関数 f が $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ の形に書けるときには (この場合は $r^2\cos\theta = r^2 \cdot \cos\theta$ である), 累次積分として, $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \left(\int_a^b f_1(x)dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)dy\right)$ とできる．58 頁でも同様の議論が行われている.

[*16] 2 変数に対して方程式が 3 つあるので, 解が存在しない可能性は十分にあることに注意する．また, これらをチェックしなければ減点対象となることは論を俟たない.

(2) $t = x^2y^3$ とおくと連鎖律により，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{df}{dt} = 2xy^3 \frac{df}{dt},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{df}{dt} = 3x^2y^2 \frac{df}{dt}$$

よって，

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - 5z = 2x^2y^3 \frac{df}{dt} + 3x^2y^3 \frac{df}{dt} - 5f = 5x^2y^3 \frac{df}{dt} - 5f = 5t\frac{df}{dt} - 5f = 0$$

(1) より，$\boldsymbol{f(t) = Ct}$, $\boldsymbol{z(x, y) = Cx^2y^3}$ **(** $\boldsymbol{C}$ **は任意定数)** となる．

14 平成 23 年 長岡技大編入試験

問題 1　箱の中に数字 1 が書かれたカード 1 枚と, 数字 2 が書かれたカード 1 枚が入っている．この箱から 1 枚のカードをでたらめに取り出して数字を確かめてから元に戻す．この試行をくり返し行い, 取り出したカードの数の和が 3 以上になったとき試行を終了し, そのときの和を X とする．以下の問いに答えなさい.

(1) $X = 4$ となる確率を求めなさい.

(2) X の期待値を求めなさい.

問題 2　$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について, $A^2 = A$ が成り立っているとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) x, y を求めなさい.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

問題 3　3 辺の長さが 1 である台形の面積の最大値を求めなさい.

問題 4　以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + c^2y = 0$ の一般解を求めなさい．ただし, c は正の定数である.

(2) $f(t)$ を 2 回微分可能な関数とする．2 変数関数 $z(x, y) = f(3x - 4y)$ が偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + z = 0$ の解となるような $f(t)$ を求めなさい.

14.1 解答

問題 1　この試行は毎回 1 か 2 を取るので, 3 回以上の試行が行われないことに注意する.

(1) $X=4$ となるのは, その前の試行で合計 2 となっていて, 最後に 2 と書かれたカードを引く状況である. よって, これらは

(a) 1 回目に 2, 2 回目に 2 を引く場合

(b) 1 回目に 1, 2 回目に 1, 3 回目に 2 を引く場合

の何れかである. 復元抽出であるから各々の試行が独立であるので,

(a) の確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(b) の確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(a) と (b) は排反事象であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(2) 確率変数 X の取り得る値は $X \geqq 3$ である. また $X \geqq 5$ となるにはその前の試行で $X \geqq 3$ でなければならないが, $X \geqq 3$ であればこの試行は既に終了しているので, 結果として X の取り得る値は $X=3,4$ のみである. したがって, $P(X=3)=1-P(X=4)=\frac{5}{8}$. よって, 期待値 $E[X]$ は

$$E[X]=\frac{3}{8}\cdot 4+\frac{5}{8}\cdot 3=\boldsymbol{\frac{27}{8}}$$

問題 2　(1) $A^2=\begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-y & xy+2y \\ -x-2 & -y+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である. よって, 各々の第 2 行の成分を比較して[*17] $-x-2=-1, -y+4=2$, すなわち $\boldsymbol{x=-1, y=2}$ となる. これは 第 1 行の成分を比較して得られる $x^2-y=x, xy+2y=y$ に代入しても成立するので正しい[*18].

(2) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である. 固有方程式を求めると,

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)(2-\lambda)+2=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$$

よって, 固有値は $\boldsymbol{\lambda=0,1}$

次に固有ベクトルを求める.

$\lambda=0$ **のとき**　対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x_1}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[*17] ここで, 第 1 行を比較すると x, y に関する 2 次式となり, 計算が面倒となる!

[*18] このように, 実際に答えが成立する, ということを確認することは実は非常に重要である. 問題によっては誤植の類で数値が訂正されるかも知れないし, 自身の計算の正当性を確認するのに役に立つからである.

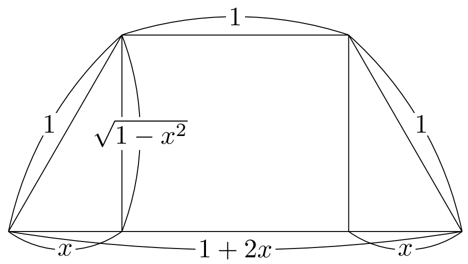
したがって, $-x+2y=0$, $x=2y$. よって, $y=t$ とおくと, $x=2t$, つまり $\boldsymbol{x_1}=t_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (t_1 は任意の 0 でない実数) を得る.

$\lambda=1$ のとき 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x_2}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ について,

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

したがって, $-x+y=0$. $x=t_2$ とおくと, $y=t_2$ となる.
つまり, $\boldsymbol{x_2}=t_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (t_2 は任意の 0 でない実数) を得る.

問題 3 上底と下底の長さがともに 1 であるような台形は全ての辺が 1 であるような平行四辺形, すなわち一辺の長さが 1 であるような菱形となる. よって, この場合は正方形のとき面積が最大となりそのとき面積は 1 である.
そこで, 下底の長さを $1+2x$ とすると[*19], 他の 3 辺の長さが 1 である. このとき明らかに等脚台形[*20]である. このとき, 下図より高さは $\sqrt{1-x^2}$ となる.



またこの図形が四角形である為には, $0<1+2x<3$, つまり $-\dfrac{1}{2}<x<1$ でなければならない. よって, 台形の面積を $S(x)$ とおくと,

$$S(x)=\frac{1}{2}(1+1+2x)\sqrt{1-x^2}=(1+x)\sqrt{1-x^2}=(1+x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

となる.

$$\begin{aligned}S'(x)&=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1+x)\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{(1-x^2)-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1+x)(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

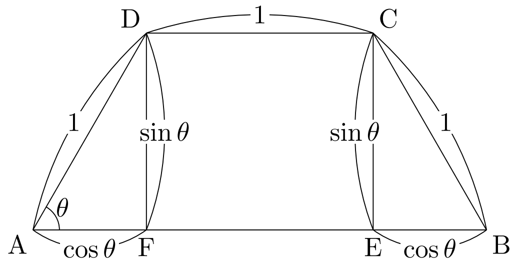
なので, ここで増減表を書くと,

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

[*19] これは次にあるように, 等脚台形であるから, 最初から 1 を基準に膨らんだ部分の三角形 (しかも左右対称!) を考えるからである. 下底を x と置いても変わらない. 気になる場合は下底を x とおいて自身で計算すれば良い.
[*20] 等脚台形とは, 一組の対辺が平行であり, なおかつ別のもう一組の対辺とその間に挟まれる一辺となす角が等しい四角形である.

となる．よって，$S(x)$ 最大値は $S\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$．このとき，$\frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$ であるから求める面積の最大値は $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ である．[21]

別解) 先と同じく，下底を変化させる状況を考える．明らかに下底は 1 より大きくせねばならないことに注意する．まず台形について CD を上底，AB を下底とする．このとき，下図のように $\angle\mathrm{DAB} = \theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおき，C, D から AB に下ろした垂線の足をそれぞれ E, F とおく．



すると台形の面積は △ADF, 長方形 DCEF, △CEB の面積を合わせたものとなる．$\angle\mathrm{CBE} = \theta$ であることに気をつけると，$\mathrm{DF} = \mathrm{CE} = \sin\theta$, $\mathrm{AF} = \mathrm{EB} = \cos\theta$ であるから，台形の面積を $S(\theta)$ と置くと

$$S(\theta) = \sin\theta + \sin\theta\cos\theta$$

となる．

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos\theta + (2\cos^2\theta - 1) = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \\ &= (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であり，

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\to$	0

であることに気を付けると，増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	0
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

となる[22].

$S(\theta)$ は $\cos\theta = \frac{1}{2}$，すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．

[21] 解答作成の際，答えは明らかに正方形であると勘違いをしがちである．これは「対称性の高い」図形が答えであろう，という直感に基く誤謬である．受験生諸賢は注意されたい．然し乍ら，このときの答えは正三角形の一部を切り取ったものなので，その意味では「対称性の高さ」自体は有効な直感として持つべきであろう．

[22] この増減表は，あくまで「$\cos\theta$」を主体に取っているものである．実際には θ を自分で置いているだけなので，無理に θ に関しての増減表を作る必要はない．

問題 4　(1) 特性方程式 $x^2+c^2=0$ を解くと, $x=\pm ci$ (ただし, $i=\sqrt{-1}$ である)[*23]. よって微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+c^2y=0$ の一般解は, $\boldsymbol{y=C_1\cos ct+C_2\sin ct}$ (ただし, C_1, C_2 は任意定数) となる.

(2) $z(x,y)=f(3x-4y)$ は, $f(t)$ と $t=3x-4y$ の合成関数であることに注意すると,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{df}{dt}=3\frac{df}{dt},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{d}{dt}\left(3\frac{df}{dt}\right)=9\frac{d^2f}{dt^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{df}{dt}=-4\frac{df}{dt},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{d}{dt}\left((-4)\frac{df}{dt}\right)=16\frac{d^2f}{dt^2}$$

である. ゆえに,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+z=9f''(t)+16f''(t)+f(t)=25f''(t)+f(t)=0,$$

すなわち $f''(t)+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 f(t)=0$ となる. したがって前問より,

$$\boldsymbol{f(t)=C_1\cos\left(\frac{t}{5}\right)+C_2\sin\left(\frac{t}{5}\right)}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数)}$$

となる. [*24]

[*23] 筆者よりよくご存知の受験生諸賢が多いであろうが, 工学の中では i を電流の意味で使うこともある. 数学の試験であるからまず減点対象とはなり得ないが, 注釈を加えた方が良いかも知れない.

[*24] 小問にわかれている場合, 多くの場合次問を解答するにそれまでの問いを利用することはありふれた作り方であることを知っておいて欲しい. 解答に詰まった場合は「今迄の問題の形に帰着は出来ないであろうか」という疑問を持つことも大事である.

15 平成 22 年 長岡技大編入試験

問題 1　大小 2 つのサイコロを投げて出た目をそれぞれ (a, b) とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ を作る. 以下の問いに答えなさい.

(1) A が対称行列になる確率を求めなさい.

(2) A が正則行列になる確率を求めなさい.

(3) 行列式 $|A|$ の期待値を求めなさい.

問題 2　曲線 $y = e^x$, 直線 $y = 3$ および y 軸で囲まれる部分 S の面積を A とする.

(1) S の概形を描き, その面積 A を求めなさい.

(2) $0 < t < \log 3$ とする. S のうちで $t \leqq x \leqq 2t$ の範囲にある部分の面積 $A(t)$ を求めなさい.

(3) t が前問の範囲を動くとき, $A(t)$ の最大値を求めなさい.

問題 3　xy 平面において, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とし, $-x \leqq y \leqq -x + 1$, $x \leqq y \leqq x + 1$ で表される領域を E とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) E の概形を描き, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$ を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_E (x + y)^2 dxdy$ を求めなさい.

問題 4　(1) 微分方程式 $y' = -\dfrac{x}{y}$ の一般解を求めなさい.

(2) 前問で求めた一般解の表す全ての曲線と直交する曲線を求めなさい.

15.1 解答

問題 1　(1) 2 つのサイコロを振って出る目の組合せは全部で 36 通りある[*25]．A が対称行列になる確率は $a=b$ となる確率であるから, $(a,b)=(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)$ の 6 通りある．よって求める確率は $\dfrac{6}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

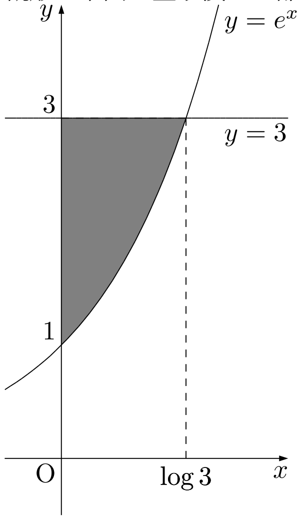
(2) A が正則行列であることと, 行列式 $|A|\neq 0$ であることは同値である．
今, $|A|=12-ab$ であるから, 求めるのは $ab\neq 12$ となる確率である．この事象を E とおくと, E の余事象 $\overline{E}$ は,「$ab=12$ となる事象」となる．求める確率は $P(E)=1-P(\overline{E})$ で, $ab=12$ となるのは $(a,b)=(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)$ の 4 通り．したがって, 求める確率は

$$P(E)=1-P(\overline{E})=1-\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{8}{9}}$$

(3)「サイコロの目 a,b」をそれぞれ確率変数 X,Y として考える．X と Y は互いに独立で, 同じ分布に従う確率変数であることに気を付ける[*26]．更に $E[X]=E[Y]=\dfrac{7}{2}$ である．[*27] 行列式 $|A|$ の期待値は, 前問より

$$E[12-XY]=12-E[XY]=12-E[X]E[Y]=12-\left(\frac{7}{2}\right)^2=12-\frac{49}{4}=\mathbf{-\frac{1}{4}}$$

問題 2　(1) $e^x=3$ となるのは, $x=\log 3$ のとき．よって $y=e^x$ と $y=3$ の交点は $(\log 3,3)$ である．ゆえに概形は下図の塗り潰した部した部分．ただし境界を含む[*28].



また求める面積 A は,

$$A=\int_0^{\log 3}(3-e^x)dx=\Big[3x-e^x\Big]_0^{\log 3}=(3\log 3-3)-(0-1)=\mathbf{3\log 3-2}$$

[*25] 確率で組合せを考えるときは, サイコロの区別が付くものと常に考えること．区別がつかない考えるとと $(a,b)=(1,2),(2,1)$ を同一視してしまう．これでは全事象は 21 通りとなってしまう!

[*26] X と Y が独立であることを確認せずに $E[XY]=E[X]E[Y]$ という公式を利用してはならない

[*27] $E[X]$ と $E[Y]$ は予め出しておく．なぜなら次の式で使うにも,「$\dfrac{7}{2}$ とは一体何物か?」という問い掛けに対する解答は, 解答中に是非とも書いておかなければならないからである．

[*28] x 軸, y 軸への切片や, 関数, 交点の座標など, 不正確な図であってもそのデータを読み取れるように書くこと, 特に境界を含む・含まない, ということは正確に書いておく

$$\text{別解)}\quad A=\int_1^3 \log y\,dy=\Big[x\log x-x\Big]_1^3=(3\log 3-3)-(1\cdot 0-1)=3\log 3-2$$

※よく混乱しがちであるが, $e^{\log a}=a$, $a^0=1$ である.

※別解では x 軸と y 軸の役割を交換したものとして捉えている. また, この場合 $\log 1=0$ であることに気を付ける.

(2) 積分区間はの上端は $2t$ と $\log 3$ の内, 小さい方を取るので[*29],

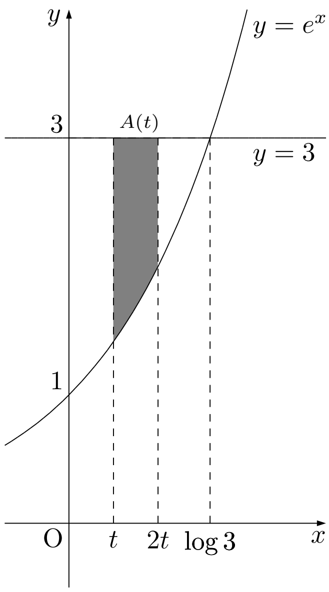
$0<2t\leqq \log 3$, すなわち $0<t\leqq \dfrac{1}{2}\log 3$ のとき,

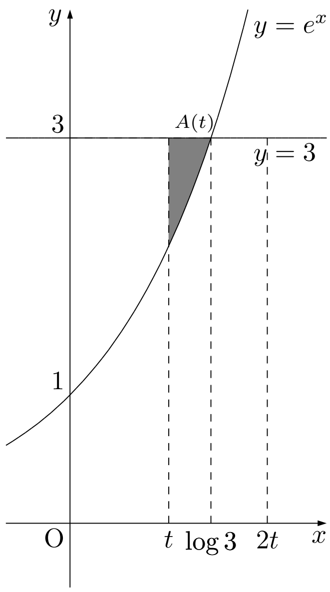
$$A(t)=\int_t^{2t}(3-e^x)dx=\Big[3x-e^x\Big]_t^{2t}=(6t-e^{2t})-(3t-e^t)=-e^{2t}+e^t+3t$$

$t<\log 3$ かつ $\log 3<2t$, すなわち $\dfrac{1}{2}\log 3<t<\log 3$ のとき,

$$A(t)=\int_t^{\log 3}(3-e^x)dx=\Big[3x-e^x\Big]_t^{\log 3}=(3\log 3-3)-(3t-e^t)=e^t-3t+(3\log 3-3).$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A(t)=\begin{cases}-e^{2t}+e^t+3t & \left(0<t\leqq \dfrac{1}{2}\log 3\right),\\ e^t-3t+(3\log 3-3) & \left(\dfrac{1}{2}\log 3<t<\log 3\right)\end{cases}}$$





(3)

$$A'(t)=\begin{cases}-2e^{2t}+e^t+3=-(2e^{2t}-e^t-3)=-(2e^t-3)(e^t+1), & \left(0<t\leqq \dfrac{1}{2}\log 3\right)\\ e^t-3, & \left(\dfrac{1}{2}\log 3<t<\log 3\right)\end{cases}$$

[*29] 短絡的に $\displaystyle\int_t^{2t}$ としないこと. 問題文には「S のうちで」とはっきり書いてある.

より, 増減表を書くと[30]

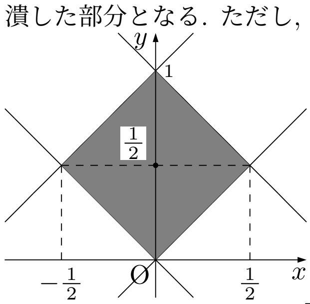
e^t	0	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
t	0	$\cdots$	$\log\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}\log 3$	$\cdots$	$\log 3$
$A'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	$-$
$A(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	

となる. よって, 最大値は $e^t = \dfrac{3}{2}$, すなわち $t = \log\dfrac{3}{2}$ のとき,

$A\left(\log\dfrac{3}{2}\right) = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} + 3\log\dfrac{3}{2} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4} + 3\log\dfrac{3}{2}}$

問題 3 (1) $E = \{(x,y) : -x \leqq y \leqq -x+1,\ x \leqq y \leqq x+1\}$ であるから,

E は 4 直線 $y = x, y = x+1, y = -x, y = -x+1$ で囲まれる部分なので, E の概形は下図の塗り潰した部分となる. ただし, 境界を含む.



また, E は一辺の長さが $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の正方形であるから, その面積は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ である.

(2) $D = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ より,

$$\iint_D x^2 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 dx\right) dy = \left(\int_0^1 dy\right)\left(\int_0^1 x^2 dx\right) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

となる[31].

(3)

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y) : -x \leqq y \leqq -x+1, x \leqq y \leqq x+1\} \\ &= \{(x,y) : 0 \leqq x+y \leqq 1, 0 \leqq y-x \leqq 1\} \end{aligned}$$

である. ここで $x+y = u$, $y-x = v$ とおくと, $x = \dfrac{u-v}{2}$, $y = \dfrac{u+v}{2}$ となる. このとき, ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

したがって, 前問の結果と併せて

$$\iint_E (x+y)^2 dxdy = \iint_E u^2 \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dv\right)\left(\int_0^1 u^2 du\right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

[30] $A'(t)$ では, e^t の値がその正負を分けるが, 同時に t の値で $A(t)$ は形が変わる. そのため t, e^t を同時に考えねばならないので注意が必要である.

[31] 上の計算は 48 頁の注釈を参照のこと.

問題 4　(1) 方程式を変形すると, $yy' = -x$. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ であることに気を付けつつ両辺を積分すると,

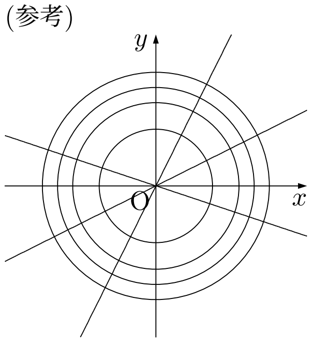
$$\begin{aligned}\int y\frac{dy}{dx}dx &= -\int xdx \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

すなわち, $\boldsymbol{x^2 + y^2 = C_1}$　(**C_1 は非負の任意定数**)[*32]

(2) (1) での方程式は $y' = -\dfrac{x}{y}$ なので, この曲線と直交する曲線の微分方程式は $y' = \dfrac{y}{x}$ である[*33].
この方程式を変形すると $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}$. したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx &= \int\frac{1}{x}dx \\ \log|y| &= \log|x| + C \quad (c \text{ は任意定数}), \\ \log|y| &= \log|e^c x|\end{aligned}$$

よって, $y = \pm e^c x$. したがって, $y = Cx$　(C は任意定数). また特に $x = 0$ という直線は明らかに円 $x^2 + y^2 = C$ と直交する. よって**原点を通る直線 $\boldsymbol{ax + by = 0}$** が題意を満たすものである. [*34]
(参考)



[*32] C_1 が非負であることはただ微分方程式を解いただけでは解らない. 2 乗の項しか無いという事実に気を付ける.

[*33] まず, $y' = -\dfrac{x}{y}$ とは, ある曲線上の点 (x, y) での接線の傾きが $-\dfrac{x}{y}$ で表される, という意味であることを解釈しておいた上で各点 (x, y) におけるグラフの傾き $(= y')$ を互いに掛け合わせると -1 となるという事実に基いている.

[*34] (1) で求めた曲線は, 全て原点中心の円または原点である. という幾何的な情報を見る.

16　平成 21 年 長岡技大編入試験

問題 1　以下の問いに答えなさい.

(1) バスが毎時 0 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人がバスに乗るまでの時間の期待値を求めなさい.

(2) バスが毎時 0 分, 25 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人が 25 分のバスに乗る確率を求めなさい.

(3) $0 < x < y < 60$ とする．バスが毎時 0 分, x 分, y 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人がバスに乗るまでに時間の期待値 $f(x, y)$ を求めなさい.

(4) $f(x, y)$ の最小値およびそのときの x, y を求めなさい.

問題 2　以下の問いに答えなさい.

(1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい.

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい.

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ との反時計まわりの回転を表すとき, a の値を求めなさい.

問題 3　以下の問いに答えなさい.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2} dx$ を求めなさい.

(2) xy 平面で, $t \leqq x^2 + y^2 \leqq 2t$ を満たす部分を D_t とする．D_t の概形を描き, その面積を求めなさい.

(3) t が正の実数の範囲を動くとき, 2 重積分 $V(t) = \displaystyle\iint_{D_t} e^{-x^2-y^2} dxdy$ の最大値を求めなさい.

問題 4　連立微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = -4y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

について以下の問いに答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) 初期条件 $x(0) = 0,\ y(0) = 1$ を満たす解を求めなさい.

16.1 解答

問題 1　(1) バス時刻を知らずに来る人の時刻 (分のみを考える) を X とおくと, X は区間 $[0, 60)$ 上の一様分布に従う確率変数である. したがって, X の確率密度関数 $p(t)$ は

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}, & 0 \leqq t < 60, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. 時刻 X に来たときの待ち時間は $60 - X$ となるから, 求める期待値は $E[60 - X]$ である*35. したがって,

$$E[60-X] = \int_{-\infty}^{\infty} (60-t)p(t)dt = \int_0^{60} \left(1 - \frac{t}{60}\right) dt = \left[t - \frac{1}{120}t^2\right]_0^{60} = 60 - \frac{3600}{120} = 30$$

となる. 故に待ち時間の期待値は **30 分**である. *36.

(2) 求める確率は $P(0 \leqq X < 25) = \displaystyle\int_0^{25} \frac{1}{60} dt = \frac{25}{60} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$

(3) $0 < x < y < 60$ に対し, 問題の条件下での待ち時間を確率変数 Y とおくと,

$$Y = \begin{cases} x - X, & 0 \leqq X < x \\ y - X, & x \leqq X < y \\ 60 - X, & y \leqq X < 60 \end{cases}$$

である. ゆえに, 求める期待値 $f(x, y) = E[Y]$ *37 は,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= E[x - X;\ 0 \leqq X < x] + E[y - X;\ x \leqq X < y] + E[60 - X;\ y \leqq X < 60] \\ &= \int_0^x (x-t)\frac{1}{60}dt + \int_x^y (y-t)\frac{1}{60}dt + \int_y^{60} (60-t)\frac{1}{60}dt \\ &= \frac{1}{60}\left(x\int_0^x dt + y\int_x^y dt + 60\int_y^{60} dt + \int_0^{60} tdt\right) \\ &= \frac{1}{60}\left(x^2 + y(y-x) + 60(60-y) - 1800\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{60}\left(x^2 - xy + y^2 - 60y + 1800\right)} \end{aligned}$$

*35 ちなみに, 待ち時間そのものも値を 0 から 60 の間で取る一様分布に従う確率変数であるが, (2), (3) での定式化の容易さからこちらを採用した. また, 大日本図書の教科書では確率密度関数は $f(x)$, $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ としているが, この問題では x が既に定数として使用されているのでパラメータが時間である, という意味も込めて変数を t, また f も関数として使われているので密度関数は p (Probability density function に起因する) を採用した. このように, 式で表現する際には「既に使われている文字は使用しない」という大原則を無視してはならない. 誤って使用すると大混乱に陥る.

*36 待ち時間の平均が 30 分なのは直感的には明らかである. しかし数学の問題として定式化されている以上「直感的に明らか」と解答してはならない. 出題意図は解答を定式化して説明し, 答える能力を測るものである. そもそも数学の試験とは数学的に明らかな事実の積み重ねを解答するものであり, 「直感的に明らか」ということを求めるものでは無い!

*37 基本公式 $E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)p(t)dt$ の ϕ がどのようなものかをしっかりと見る必要がある. なお, 次にある $E[\phi(X);\ a \leqq X < b]$ は「$a \leqq X < b$ となる範囲での $\phi(X)$ の期待値」という意味であり, 定義から $E[\phi(X);\ a \leqq X < b] = \int_a^b \phi(t)p(t)dt$ となる. 大日本図書の教科書には掲載されていない書き方であるが, 確率論のテキストにはよく掲載されている. ただし, “;” の変わりに “:” で書いているものもある.

(4)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{60}\left(x^2 - xy + y^2 - 60y + 1800\right) \\
&= \frac{1}{60}\left\{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 60y + 1800\right\} \\
&= \frac{1}{60}\left\{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 - 80y\right) + 1800\right\} \\
&= \frac{1}{60}\left\{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - 40\right)^2 - 1200 + 1800\right\} \\
&= \frac{1}{60}\left\{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - 40\right)^2 + 600\right\}
\end{aligned}
$$

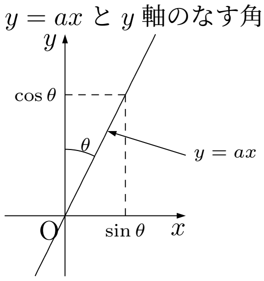
となるので, $x - \dfrac{y}{2} = 0$, $y - 40 = 0$ のとき,
すなわち $\boldsymbol{x = 20, y = 40}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{f(20, 40) = 10}$ **を取る**[*38].

問題 2　(1) y 軸に関する対称変換であるから, y 座標は変わらず, x 座標は符号のみが変わる, すなわち

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1x + 0y \\ 0x + 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

よって, $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(2) $y = ax$ と y 軸のなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ と置く.



$y = ax$ に関する対称変換は点 (x, y) を反時計まわりに θ 回転し, y 軸に関する対称変換を行った後に, $(-\theta)$ 反時計まわりに回転するという合成変換と考えることが出来る. 反時計まわりに θ 回転する変換を表現する行列 $R(\theta)$ は

$$
R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

である. よって, 求める行列 B は,

$$
\begin{aligned}
B &= R(-\theta)AR(\theta) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[*38] 2 変数関数 $f(x,y)$ の最小値なので, $f_x = f_y = 0$, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} を求めて極値から最小値を・・・と行きたいところではあるが, Hesse 行列について $(f_{xy})^2 - f_{xx} \cdot f_{yy} = 0$ となり適用出来ない. 実際, $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = \dfrac{1}{30}$ となってしまう. 恥ずかしながら解答作成の際にも一度この手法を用いて間違えてしまった. また, (1) 同様 (4) での数値そのものは直感的には明らかであることは注意されたい (1 時間を 20, 40, 60 分で 3 分割すればもっともバランスが取れる上に, 待ち時間の期待値は 10 分である)

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\cos^2\theta + \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

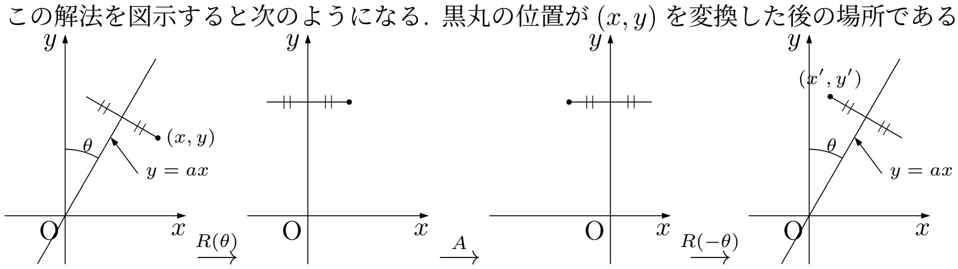
ここで, $a = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ であるから, $\cos\theta = a\sin\theta$ となるので,

$$= \begin{pmatrix} (1-a^2)\sin^2\theta & 2a\sin^2\theta \\ 2a\sin^2\theta & (a^2-1)\sin^2\theta \end{pmatrix} = \sin^2\theta \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{pmatrix}$$

さらに, $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = a^2\sin^2 + \sin^2\theta$ より, $\sin^2\theta = \dfrac{1}{a^2+1}$ であるから,

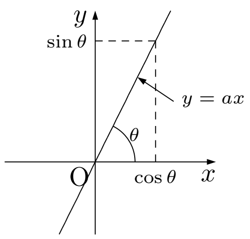
$$= \boldsymbol{\frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{pmatrix}}.$$

この解法を図示すると次のようになる. 黒丸の位置が (x, y) を変換した後の場所である.



この直線 $y = ax$ に関する対称変換を表す行列が答のようになるのは良く知られている事実である. 上の解法は (1) に基いたものである. ほぼ同様の内容であるが別解として紹介しておこう[39].

別解)$y = ax$ と x 軸とのなす角を θ とおくと, $a = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される.



すると, $y = ax$ に関する対称変換は, 点 (x, y) を時計まわりに θ 回転し, x 軸に関する対称変換を行った後に, $(-\theta)$ 時計まわりに回転するという合成変換と考えることができる. x 軸に関する対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である (これは (1) と全く同様に示されるので細かい議論は割愛する). さらに時計まわりに θ 回転する変換を表す行列は

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である. よって,

$$B = R(-(-\theta)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(-\theta)$$

[39] ある程度の知識を必要とする.

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで, $\tan\theta = a$ に対し,

$$\sin 2\theta = \frac{2a}{1+a^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

となる事実が**良く知られている**[*40].

よって, $B = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & \dfrac{-(1-a^2)}{1+a^2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{pmatrix}$[*41]

別解) 行列 B について, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ とおく. $B = B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{pmatrix}$ である. B は $y = ax$ に関する対称変換であるから, 点 $(1, 0)$ と (x', y') の中点は $y = ax$ 上にある. 故に,

$$\frac{y'+0}{2} = a\left(\frac{x'+1}{2}\right)$$

よって, $y' = ax' + a$. また同時に点 $(1, 0)$ と (x', y') を結ぶ線分は直線 $y = ax$ と直交するので,

$$\frac{y'-0}{x'-1} = -\frac{1}{a}.$$

よって, $y' = -\dfrac{1}{a}x' + \dfrac{1}{a}$. これらを連立して, $ax' + a = -\dfrac{1}{a}x' + \dfrac{1}{a}$, $(a^2+1)x = 1 - a^2$. $y' = a\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right) + a = \dfrac{2a}{1+a^2}$

点 $(0, 1)$ と (x'', y'') についても同様の議論を行って, $x'' = \dfrac{2a}{1+a^2}$, $y'' = \dfrac{a^2-1}{1+a^2}$ を得る.

(3) 条件より,

$$
\begin{aligned}
BA &= \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a^2-1 & 2a \\ -2a & a^2-1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[*40] 例えば大日本図書「基礎数学」P.149, 練習問題 3-B の 5. また, 最初の解法はこの事実を証明している.

[*41] この解法では θ として x 軸とのなす角を採用したのだから最初の解法における y 軸とのなす角は $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ と解釈されることに注意されたい.

行列の各成分を比較して,

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{1}{2},\quad \frac{2a}{1+a^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

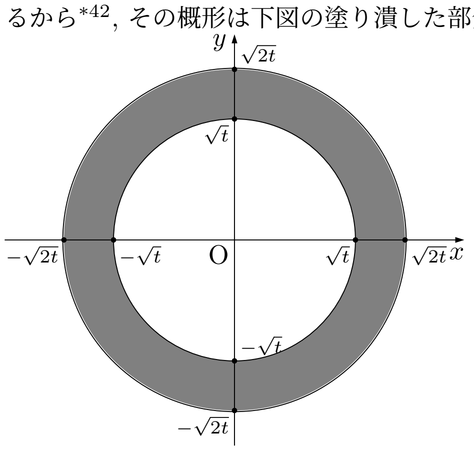
したがって, $2a^2-2=a^2+1$, $a^2=3$ より, $a=\pm\sqrt{3}$. これを $\dfrac{2a}{1+a^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ に代入して成立するのは $a=-\sqrt{3}$ のとき. よって, $\boldsymbol{a=-\sqrt{3}}$

問題 3 (1) $x^2=u$ とおくと, $\dfrac{du}{dx}=2x$. $\therefore\ \dfrac{1}{2}du=xdx$.

$$\int xe^{-x^2}dx=\int\frac{1}{2}e^{-u}du=-\frac{1}{2}e^{-u}+C=\boldsymbol{-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C}$$

(C は積分定数)

(2) D_t は原点中心, 半径 $\sqrt{2t}$ の円の内部及び境界から原点中心, 半径 $\sqrt{t}$ の円の内部を除いた部分であるから[*42], その概形は下図の塗り潰した部分. ただし境界を含む.



また, D_t の面積は $\pi(\sqrt{2t})^2-\pi(\sqrt{t})^2=\boldsymbol{\pi t}$

(3) 極座標変換により, $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと,

$$D_t=\{(x,y):t\leqq x^2+y^2\leqq 2t\}=\{(r,\theta):\sqrt{t}\leqq r\leqq\sqrt{2t},0\leqq\theta<2\pi\}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}V(t)&=\iint_{D_t}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_{\sqrt{t}}^{\sqrt{2t}}e^{-r^2}rdr\right)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_{\sqrt{t}}^{\sqrt{2t}}re^{-r^2}dr=2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{\sqrt{t}}^{\sqrt{2t}}\\&=2\pi\left(\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-2t})\right)=\pi(e^{-t}-e^{-2t})\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{dV(t)}{dt}=\pi(2e^{-2t}-e^{-t})=\pi e^{-t}(2e^{-t}-1).$$

[*42] 図は常に手書きである為, 本解答の様に正確に描けるものではないし, 採点者の要求するものは絵画としての正確性では無く, 図としての正確性である. 採点者に自身がどのような図を描きたいのかを文章で明示し, 適宜座標などを挿入して誤解されぬように注意を払うべきである.

よって, 増減表を書くと[*43],

e^{-t}	1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
t	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$V'(t)$		$+$	0	$-$
$V(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって, $V(t)$ は $t = \log 2$ のとき, 最大値 $V(\log 2) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ を取る.

問題 4 (1) 与式より, $x''(t) = -4y'(t)$ であるから, $y'(t) = x(t)$ に代入して, $x(t) = -\frac{1}{4}x''(t)$, すなわち $x''(t) + 4x(t) = 0$ を得る.

特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ を解くと $\lambda = \pm 2i$.

したがって, $x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \quad (c_1, c_2$ は任意定数)

$x'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t = -4y(t)$ であるから,

$$\boldsymbol{\begin{cases} x(t) = 2C_1 \cos 2t + 2C_2 \sin 2t \\ y(t) = C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t \end{cases} \quad (C_1, C_2\text{は任意定数})}$$

※別段,

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\ y(t) = \dfrac{1}{2}(c_1 \sin 2t - c_2 \cos 2t) \end{cases} \quad (c_1, c_2\text{は任意定数})$$

でも正解であるが, 上は解答で分数を出したくないので $2C_1 = c_1, 2C_2 = c_2$ と書き換えただけである. 余計なことをして計算ミスをしてしまいそうなら分数のままでも良い.

(2) $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ より, $x(0) = 2C_1 = 0$, $y(0) = -C_2 = 1$ となるので, $C_1 = 0$, $C_2 = -1$.

$$\therefore \boldsymbol{\begin{cases} x(t) = -2 \sin 2t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}}$$

[*43] e^{-t} は t の単調減少関数であることに注意する.

17　平成20年 長岡技大編入試験

問題1　2次の正方行列 A の4つの成分はそれぞれ独立に0または1の値を確率 $\dfrac{1}{2}$ でとるものとする．以下の問いに答えなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる確率を求めなさい．

(2) $A = {}^t\!A$ となる確率を求めなさい．ただし, ${}^t\!A$ は A の転置行列を表す．

(3) $|A| = 1$ となる確率を求めなさい．ただし, $|A|$ は A の行列式を表す．

(4) 確率変数 $X = |A^2|$ の期待値を求めなさい．

問題2　$z = x^2 + y^2$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 空間の曲面 $z = x^2 + y^2$ 上の点 (a, b, c) における接平面の方程式を求めなさい．

(3) 前問の接平面が点 $(0, 0, -\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい．

問題3　$0 < t < 1$ として, 空間の4点

$$\mathrm{A}(t, \sqrt{1-t^2}, 0), \mathrm{B}(t, -\sqrt{1-t^2}, 0), \mathrm{C}(-t, 0, \sqrt{1-t^2}), \mathrm{D}(-t, 0, -\sqrt{1-t^2})$$

を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) AB の中点 E の座標を求めなさい．

(2) △CDE の面積 S を t で表しなさい．

(3) 四面体 ABCD の体積 V を t で表しなさい．

(4) V を最大にする t の値とその最大値を求めなさい．

問題4　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$ (ω は正の定数) について, 以下の問いに答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ を満たすような解を求めなさい．

(3) 前問で求めた解が $y(1) = 0$ を満たすような ω の値を求めなさい．

17.1 解答

問題 1　行列の各成分について, $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ とおくと, 確率変数 X_i $(i = 1,2,3,4)$ は全て 2 項分布 $B(1, \frac{1}{2})$ に従い, 互いに独立である.

(1) X_i の独立性に気を付けると求める確率は

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0)P(X_4 = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

[*44]

(2) $A = {}^tA$ となるのは $X_2 = X_3$ のときなので, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(X_2 = X_3) &= P(X_2 = 0, X_3 = 0) + P(X_2 = 1, X_3 = 1) \\ &= P(X_2 = 0)P(X_3 = 0) + P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(3) $|A| = X_1X_4 - X_2X_3$ で, X_i の取る値は 0 または 1 なので, $|A| = 1$ となる確率は「X_1, X_4 が共に 1 かつ, $X_2 = 0$ または $X_3 = 0$」となる確率である. したがって, 求める確率は個数定理より,

$$\begin{aligned} &P(X_1 = 1, X_4 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_4 = 1, X_3 = 0) - P(X_1 = 1, X_4 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_4 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_4 = 1)P(X_3 = 0) \\ &\qquad - P(X_1 = 1)P(X_4 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{3}{16}} \end{aligned}$$

(4) 確率変数 $X = |A^2|$ の期待値を求める. $X = |A^2| = |A|^2$ であるから[*45],

$$X = (X_1X_4 - X_2X_3)^2 = (X_1)^2(X_4)^2 - 2X_1X_2X_3X_4 + (X_2)^2(X_3)^2.$$

$E[X_i] = \frac{1}{2}$, $E[(X_i)^2] = \frac{1}{2}$, $(i = 1,2,3,4)$ であり, X_i が互いに独立であることに気を付けると,

$$\begin{aligned} E[|A^2|] &= E[(X_1)^2(X_4)^2 - 2X_1X_2X_3X_4 + (X_2)^2(X_3)^2] \\ &= E[(X_1)^2]E[(X_4)^2] - 2E[X_1]E[X_2]E[X_3]E[X_4] + E[(X_3)^2]E[(X_4)^2] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

問題 2　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \boldsymbol{2y}$ である.

(2) 接平面の公式により, 点 (a,b,c) における接平面の方程式は

$$z - c = 2a(x - a) + 2b(y - b),$$
$$\boldsymbol{z = 2ax + 2by - 2(a^2 + b^2) + c}$$

である.

[*44] やや大仰に見えるかも知れないが, 確率変数を使えば次問以降で話を整理し易くなる. これが抽象化の意義である.

[*45] 単純に $E[X] = E[|A|^2] = (E[|A|])^2$ などとしてはならない! 確率変数の積を分解するには互いに独立であるという条件が必要である.

(3) 前問の接平面が $(0,0,-\sqrt{2})$ を通るので, (x,y,z) に代入して

$$-\sqrt{2}=-2(a^2+b^2)+c$$

となる．また, (a,b,c) は曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点なので, $c=a^2+b^2$ を満たす．このことから,

$$-\sqrt{2}=-2c+c$$

よって, $\boldsymbol{c=\sqrt{2}}$ である.[*46]

問題 3 (1) $\mathrm{A}(t,\sqrt{1-t^2},0)$ と $\mathrm{B}(t,-\sqrt{1-t^2},0)$ の中点であるから, $\mathbf{E}\,(\boldsymbol{t},\mathbf{0},\mathbf{0})$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-t,0,-\sqrt{1-t^2})-(-t,0,\sqrt{1-t^2})=(0,0,-2\sqrt{1-t^2})$ であり,
$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=(t,0,0)-(-t,0,\sqrt{1-t^2})=(2t,0,-\sqrt{1-t^2})$．よって,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2&=4(1-t^2)\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2&=(2t)^2+(1-t^2)=3t^2+1\\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}&=2(1-t^2)\end{aligned}$$

である．したがって, $\triangle\mathrm{CDE}$ の面積は[*47]

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CDE}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{4(1-t^2)(3t^2+1)-4(1-t^2)^2}\\ &=\sqrt{(1-t^2)(3t^2+1-(1-t^2))}\\ &=\sqrt{(1-t^2)(4t^2)}\\ &=\boldsymbol{2t\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

(3) 点 $\mathrm{A}(t,\sqrt{1-t^2},0)$ は xy 平面上, $\triangle\mathrm{CDE}$ は xz 平面上にあることに気をつけると, 底面を $\triangle\mathrm{CDE}$ とすれば四面体 ACDE の高さは $\mathrm{AE}=\sqrt{1-t^2}$ である．よって,

$$\mathrm{ACDE}=\frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\cdot 2t\sqrt{1-t^2}=\frac{2}{3}t(1-t^2)=\frac{2}{3}(t-t^3)$$

同様に四面体 BCDE の体積は $\frac{2}{3}(t-t^3)$ であるから, 2 つの四面体を合わせて $V=\boldsymbol{\frac{4}{3}(t-t^3)}$.

(4) $V=V(t)$ と書く．$V'(t)=\frac{4}{3}(1-3t^2)=\frac{4}{3}(1-\sqrt{3}t)(1+\sqrt{3}t)$ なので, 増減表を書くと以下のよ

[*46] この条件を満たす $(a,b,\sqrt{2})$ は点 $(0,0,\sqrt{2})$ 中心, 半径 $\sqrt[4]{2}$ で xy 平面に平行な円周 $\left\{(x,y,\sqrt{2})\mid x^2+y^2=\sqrt{2}\right\}$ 上にある．

[*47] $\triangle\mathrm{CDE}$ の面積が $\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right)^2}$ となるのは良く知られた公式である．実際 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ のなす角を θ とおくと,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2-\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|\cos\theta\right)^2}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|\sin\theta$$

である ($0\leqq\theta\leqq\pi$ なので, $\sin\theta\geqq 0$ であることに注意する).

うになる.

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$V'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$V(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって, $t = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ のとき, V は最大値 $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{8}{9\sqrt{3}}}$ を取る.

問題 4 (1) 特性方程式 $x^2 + \omega^2 = 0$ を解くと, $x = \pm\omega i$ であるから, 問題の微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数)}$$

(2) 一般解に初期条件 $y(0) = 0$ を代入すると, $0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1$. よって, $C_1 = 0$. また, $y' = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$ に対し初期条件 $y'(0) = 2$ を代入すると, $2 = -C_1 \omega \sin 0 + C_2 \omega \cos 0 = C_2 \omega$. よって, $C_2 = \dfrac{2}{\omega}$ である. したがって, 求める解は

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{\omega} \sin \omega t}$$

(3) $y(1) = 0$ の条件から, $0 = \dfrac{2}{\omega} \sin \omega$. $\omega > 0$ より, $\sin \omega = 0$ なので, $\boldsymbol{\omega = n\pi}$, **(**$\boldsymbol{n}$ **は正の整数)**

18 平成 19 年 長岡技大編入試験

問題 1　赤玉 2 個と白玉 5 個をでたらめに 1 列に並べる．以下の問いに答えなさい．

(1) 5 個の白玉が連続する確率を求めなさい．

(2) 2 個の赤玉がとなり合わない確率を求めなさい．

問題 2　実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．以下の問いに答えなさい．

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい．

(2) 原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき, $A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい．

(3) $A\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい．

問題 3　座標平面に 2 点 $\mathrm{A}(3,0), \mathrm{B}(0,4)$ をとる．点 P が円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき, 三角形 ABP の面積の最大値と最小値を求めなさい

問題 4　以下の問いに答えなさい．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい．

(2) 区間 $[a,b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい．$[a,b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し, その分点を $a = a_0 < a_2 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ とする．各小区間上に作られる台形の面積の和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(a_{k-1}) + f(a_k)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

を S の近似値とする．この近似法を**台形公式**という．

区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して, 台形公式による $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい．

問題 5　微分方程式 $y'' - \dfrac{(y')^2}{y} + y = 0$ の解で初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を満たすものを $y = y(x)$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $z = \log y$ とおくとき, $z = z(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい．

(2) y を求めなさい．

18.1 解答

問題 1　赤玉 2 個と白玉 5 個は全て区別がつくものと考える.[*48]今, 7 個の玉の並べ方の総数は 7! 通りある.

(1) 5 個の白玉が連続する並びは, ●を赤玉, ○を白玉とすると,

○○○○○●●　●○○○○○●　●●○○○○○

の形の 3 通りが考えられて, 各々の場合で白玉の並び方 5! 通りと赤玉の並び方 2! 通りが考えられる. よって, 連続する組合せの総数は積の法則により $3 \cdot 2! \cdot 5!$ である.

したがって, 求める確率は $\dfrac{3 \cdot 2! \cdot 5!}{7!} = \dfrac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

(2) 2 個の赤玉が隣り合わない事象は隣り合う事象の余事象である. そこで, 2 個の赤玉が隣り合う確率を求める. 2 個の赤玉が隣り合う並びは (1) と同様に考えると,

●●○○○○○　○●●○○○○　○○●●○○○

○○○●●○○　○○○○●●○　○○○○○●●

の 6 通りが考えられて, 更に各々の場合で (1) と同じくして $2! \cdot 5!$ 通りある.

よって, 求める確率は $1 - \dfrac{6 \cdot 2! \cdot 5!}{7!} = \boldsymbol{\dfrac{5}{7}}$

問題 2　(1)

$$
\begin{aligned}
R(\theta)K &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \\
KR(-\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって, $R(\theta)K = KR(-\theta)$　□

(2)

$$
R(2\theta)K = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}
$$

である. ここで, 平面上の任意の点 (x, y) に対して,

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(2\theta)K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix}
$$

である. したがって, (x, y) と (x', y') の中点について,

$$
\begin{aligned}
\frac{x + x'}{2} &= \frac{x(1 + \cos 2\theta) + y\sin 2\theta}{2} = \frac{x(1 + (2\cos^2\theta - 1)) + 2y\sin\theta\cos\theta}{2} \\
&= x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta = \cos\theta(x\cos\theta + y\sin\theta) \\
\frac{y + y'}{2} &= \frac{x\sin 2\theta + y(1 - \cos 2\theta)}{2} = \frac{2x\sin\theta\cos\theta + y(1 - (1 - 2\sin^2\theta))}{2}
\end{aligned}
$$

[*48] 確率の問題においては, サイコロや同色の玉などは全て区別がつくものと考えないと話がおかしくなる. 確率事象としてはサイコロに大小があろうがなかろうがある事象 (たとえばゾロ目になるなど) の確率は同じ筈である

$$= x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta = \sin\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)$$

より, その座標は $(x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta, x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta)$ である. このとき,

$$\frac{\frac{y+y'}{2}}{\frac{x+x'}{2}} = \frac{\sin\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)}{\cos\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

これは, (x, y) と (x, y) を $R(2\theta)K$ で変換した点 (x', y') の中点が常に原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線上にあることを示している. つまり, (x', y') はこの直線に関して (x, y) を対称移動した点であることを示している. よって, $A(\theta) = R(2\theta)K$ である[*49]. □

(3) $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および,

$$\begin{aligned} R(\alpha)R(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

であることに気を付けると, (1) より,

$$\begin{aligned} A\left(\frac{7\pi}{12}\right)A(\theta) &= R\left(\frac{7\pi}{6}\right)KR(2\theta)K = R\left(\frac{7\pi}{6}\right)K^2R(-2\theta) \\ &= R\left(\frac{7\pi}{6}\right)R(-2\theta) = R\left(\frac{7\pi}{6} - 2\theta\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となる. よって, $R(-\theta)$ が $R(\theta)$ の逆行列であり, $R(2n\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n は整数) となることに気を付けると,

$$R\left(\frac{7\pi}{6} - 2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = R(2n\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$-2\theta + \frac{4\pi}{6} = 2n\pi.$$

つまり, $\boldsymbol{\theta = \frac{1}{3}\pi + n\pi}$ **(n は整数)** となり,

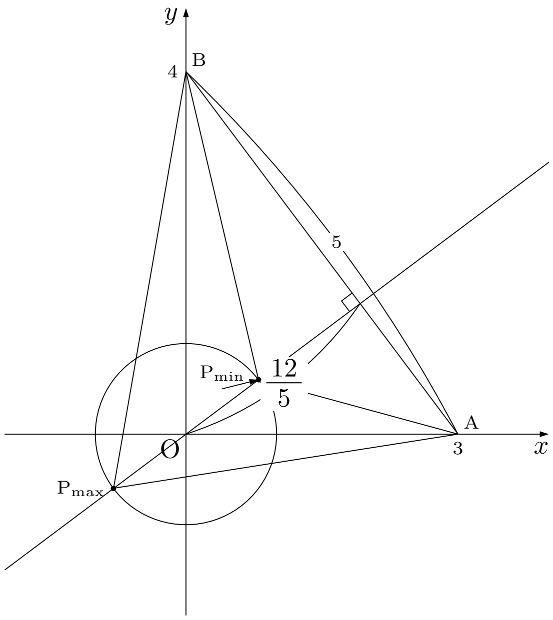
$$\boldsymbol{A\left(\frac{1}{3}\pi + n\pi\right) = R\left(2\left(\frac{1}{3}\pi + n\pi\right)\right)K = R\left(\frac{2}{3}\pi\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

問題 3　2 点 AB を結ぶ直線の方程式は $4x + 3y = 12$ である. 直線 $4x + 3y - 12 = 0$ と原点との距離は, $\dfrac{|4\cdot 0 + 3\cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{12}{5} > 1$ となり, 線分 AB は円周 $x^2 + y^2 = 1$ と交点を持たない. [*50] また, 円の

[*49] 出題者の意図は明らかに K が y 軸に関する対称変換で $R(\theta)$ が反時計回りに θ 回転する移動を表すことに気付いた上, 直線に関する対称変換が θ 回転 $\to$ y 軸に関する対称変換 $\to$ $(-\theta)$ 回転, という形に書けることを言い, (1) を使わせようというものであるだろうが, 言葉での説明が面倒なので今回は解答の手法を用いた (後日加えるかも知れません)

[*50] この確認は非常に重要である. 三角形の最大値・最小値と言った場合円周上の点と線分 AB が交わる場合は三角形とならないので除外せねばならないからである.

中心 (原点) を通り AB と直交する直線の方程式は $3x-4y=0$ である．下図の様に $\triangle$ABP の面積が最大値を取るときの P の座標を $\mathrm{P}_{\max}$, 最小値を取るときの P の座標を $\mathrm{P}_{\min}$ とおくと, $\mathrm{P}_{\min}$, $\mathrm{P}_{\max}$ はそれぞれ $3x-4y=0$ と $x^2+y^2=1$ の交点の第 1 象限, 第 3 象限にある点である．



また線分 AB の長さは 5 であるから,

$$
\begin{aligned}
\text{最大値} : \triangle \mathrm{AP}_{\max}\mathrm{B} &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(\frac{12}{5}+1\right) = \mathbf{\frac{17}{2}},\\
\text{最小値} : \triangle \mathrm{AP}_{\min}\mathrm{B} &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(\frac{12}{5}-1\right) = \mathbf{\frac{7}{2}}
\end{aligned}
$$

となる．

問題 4　(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{1}$

(2) 区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ を三等分すると, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ となる．よって,

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \frac{\sin(0)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\\
&= \frac{\pi}{24} + \frac{(1+\sqrt{3})\pi}{24} + \frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{24} = \frac{(4+2\sqrt{3})\pi}{24} = \boldsymbol{\frac{(2+\sqrt{3})\pi}{12}}
\end{aligned}
$$

*51

問題 5　(1) $z=\log y$ より, $y=e^z$ である．よって,

$$
y' = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dz} = z'e^z, \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(z'e^z\right) = z''e^z + (z')^2e^z
$$

これらを微分方程式 $y'' - \dfrac{(y')^2}{y} + y = 0$ に代入すると,

$$
e^z(z')^2 + e^zz'' - \frac{(e^zz')^2}{e^z} + e^z = e^zz'' + e^z((z')^2-(z')^2) + e^z = e^z(z''+1) = 0.
$$

*51 $\dfrac{(2+\sqrt{3})\pi}{12}$ の値を計算すると, 約 0.977048617 となり比較的良い精度を与えていると言える．

よって, $e^z > 0$ より $z = z(x)$ の満たす微分方程式は $\boldsymbol{z'' + 1 = 0}$

(2) 微分方程式 $z''+1=0$, つまり $z''=-1$ の一般解は $z = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$ (C_1, C_2 は任意定数) である．さらに, y に関する初期条件から $z(0) = \log y(0) = \log 1 = 0$, $y'(0) = z'(0)e^{z(0)} = z'(0) = 0$ である．よって,

$$z(0) = C_2 = 0$$

より, $C_2 = 0$. また, $z'(x) = -x + C_1$ より,

$$z'(0) = C_1 = 0$$

なので, $C_1 = 0$. したがって, $z = -\dfrac{1}{2}x^2$ である．これにより, $\boldsymbol{y = e^z = e^{-\frac{1}{2}x^2}}$ を得る．

19　平成 18 年 長岡技大編入試験

問題 1　3 つの箱 A, B, C がある．箱の中に入っている玉は次の規則に従うものとする．ただし, n は 0 以上の整数とする．

a. 時刻 n に箱 A の中にある玉は, それぞれ独立に, 時刻 $n+1$ に確率 $\dfrac{1}{2}$ で箱 A にとどまり, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で箱 B に移る．

b. 時刻 n に箱 B の中にある玉は, それぞれ独立に, 時刻 $n+1$ に確率 $\dfrac{1}{3}$ で箱 B にとどまり確率 $\dfrac{2}{3}$ で箱 C に移る．

c. 箱 C にある玉は, そのまま箱 C にとどまり続ける．

時刻 0 に箱 A の中に 2 個の玉がり, 箱 B・C の中に玉はないとする．以下の問いに答えなさい．

(1) 時刻 1 に箱 B の中に 2 個の玉がある確率 P_1 を求めなさい．

(2) 時刻 2 に箱 C の中に 2 個の玉がある確率 P_2 を求めなさい．

(3) 時刻 2 に箱 C の中に 1 個の玉がある確率 P_3 を求めなさい．

(4) 時刻 2 に箱 B の中に 1 個の玉がある確率 P_4 を求めなさい．

問題 2　xyz 空間に 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,-2,-1)$, $\mathrm{B}(-2,-5,0)$, $\mathrm{C}(2,1,0)$ をとる．以下の問いに答えなさい．

(1) 直線 AB と yz 平面との交点を求めなさい．

(2) 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ を通る平面と x 軸との交点を求めなさい．

(3) 三角形 OBC の面積を求めなさい．

(4) 四面体 OABC の体積を求めなさい．

問題 3　曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線と直線の交点 $\mathrm{A,B}$ の座標を求めなさい．

(2) 曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(3) 点 P が曲線上の A と B の間を動くとき, 三角形 PAB の面積の最大値を求めなさい．

問題 4　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+ay=0$ (a は $a>1$ なる定数) について, 以下の問いに答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $y(0)=1,\ y'(0)=-1$ を満たす解を求めなさい．

(3) 前問で求めた解が $y(\pi)=0$ を満たすような定数 a の値を求めなさい．

19.1　解答

問題 1　まず, A から直接 C に, あるいは B から A に戻る確率は 0 であり, なおかつ, C に到達した後は玉は動かないことに気を付ける[*52].

(1) 時刻 1 で 1 個 1 個の玉が B に存在する確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ である. お互い独立に動くので, 求める確率は $P_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) 時刻 2 で 2 個とも C に存在するには, 時刻 1 で 2 個とも B に存在している. さらにそれぞれが次に C に移る確率は $\dfrac{2}{3}$ であるから, 1 つ 1 つの玉に着目すると, 時刻 2 で C に存在する確率は $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ である. どちらの玉も独立に動くので, 求める確率は $P_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$ である.

(3) いずれか一方の玉のみが時刻 2 で C に存在する事象を考えると,

(ア) 時刻 2 でいずれの玉も C に存在する事象.

(イ) 時刻 2 でいずれの玉も C に存在しない事象.

これらの和事象の余事象である. [*53]

(ア) の確率: (2) より $\dfrac{1}{9}$.

(イ) の確率: 1 つの玉について, 時刻 2 で C に存在しない確率は (2) より $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ である. よって, 2 つとも C に存在しない確率は玉が独立に動くことに気を付けると $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

したがって, 求める確率は (ア) と (イ) が排反事象であることに気を付けると,

$P_3 = 1 - \dfrac{1}{9} - \dfrac{4}{9} = \boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

(4) 時刻 2 で B の中に 1 個の玉がある事象は 1 つの玉が B に存在し, もう一方の玉が A または C に存在する確率である.

1 つの玉について 時刻 2 で B に存在する事象は,

(ア) 時刻 1 で A, 時刻 2 で B という事象 (A→A→B)

(イ) 時刻 1 で B, 時刻 2 で B という事象 (A→B→B)

の和事象である. よって,

(ア) の確率 $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

(イ) の確率 $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

であるから, $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{12}$

さて, 1 つの玉が B に存在する確率を考えると, 一方の玉については A または C に存在する事象である. これは B に存在する事象の余事象であることを考えると $1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$ である. いずれの玉が B に存在するかの 2 通りがあることに気をつけると, 求める確率は $P_4 = 2 \cdot \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{7}{12} = \boldsymbol{\dfrac{35}{72}}$

問題 2　(1) 直線 AB 上の点 (x, y, z) は点 A$(1, -2, -1)$ を通り, 方向ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2, -5, 0) - (1, -2, -1) = (-3, -3, 1)$$

を持つので, 媒介変数 t を用いて表すと, $(x, y, z) = (1 - 3t, -2 - 3t, -1 + t)$ となる. この直

[*52] この法則性がなければ, 3 元連立の漸化式を解かねばならず, 結構面倒な問題となる.

[*53] 「少くとも 1 つ」や「1 つだけ」という文言がある場合は, 直接ではなく, その余事象の確率を求める方が簡単である場合が多い. その余事象は「全てのものが・・・」という言葉が使えるからである.

線の yz 平面との交点は $x=0$ のとき, つまり $t=\dfrac{1}{3}$ のときであるから, 求める交点の座標は $\left(\mathbf{0,-3,-\dfrac{2}{3}}\right)$ である.

(2) 直線 AC 上の点 (x,y,z) は点 $\mathrm{A}(1,-2,-1)$ を通り, 方向ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,1,0)-(1,-2,-1)=(1,3,1)$$

を持つので, 媒介変数 s を用いて表すと, $(x,y,z)=(1+s,-2+3s,-1+s)$ となる. よって, 3 点 A, B, C を通る平面上の点 (x,y,z) を媒介変数を用いて表すと,

$$(x,y,z)=(1-3t+s,-2-3t+3s,-1+t+s)$$

となる. この平面と x 軸の交点なので, このとき, $y=0, z=0$ となる. 故に,

$$\begin{cases}-2-3t+3s=0\\-1+t+s=0\end{cases}$$

よって, この方程式を解くと, $t=\dfrac{1}{6}$, $s=\dfrac{5}{6}$ となる.
これを $x=1-3t+s$ に代入して, $x=1-\dfrac{3}{6}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4}{3}$.
よって, 求める交点の座標は $\left(\mathbf{\dfrac{4}{3},0,0}\right)$ である.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-2,-5,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,1,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-4-5=-9$ であり,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=4+25=29,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=4+1=5$$

であるから, 求める面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OBC}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{29\cdot5-(-9)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{145-81}=\frac{1}{2}\sqrt{64}\\&=\mathbf{4}\end{aligned}$$

(4) 四面体の底面を $\triangle\mathrm{OBC}$ とすると, $\triangle\mathrm{OBC}$ は xy 平面上に存在し, A の z 座標が -1 なので四面体の高さは 1 である. よって, 求める体積は (3) より $\dfrac{1}{3}\cdot1\cdot4=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

問題 3 (1) $y=x^2$ と $y=x+2$ の交点は $x^2=x+2$ を解くと, $(x-2)(x+1)=0$ より, $x=2,-1$. このとき, $y=4,1$ なので, 求める座標は $\mathbf{(2,4),(-1,1)}$ である[*54].

(2) 求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx&=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}\\&=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=8-3-\frac{1}{2}\\&=\mathbf{\frac{9}{2}}.\end{aligned}$$

[*54] $\mathrm{A}(-1,1),\mathrm{B}(2,4)$ としても良いのかも知れないが, A と B の関係に対する文言は何処にも含まれていない. 出題者の意図を汲み取ればこれで十分であろう.

別解) 一般に $\alpha < \beta$ に対し,

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

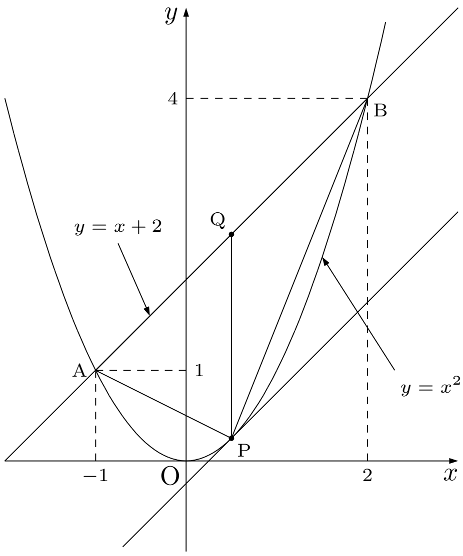
であるから, この公式に代入して,

$$\int_{-1}^2 (x+2-x^2)dx = -\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx = \frac{1}{6}(2-(-1))^3 = \mathbf{\frac{9}{2}}$$

でも良い[*55].

(3) PAB の面積が最大となるのは, P での $y=x^2$ の接線の傾きが $y=x+1$ の傾き, すなわち 1 となるときである. よって, このとき $y'=(x^2)'=2x=1$ より, P の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ である.
Q $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ とおくと, 点 Q は $y=x+2$ 上の点であるから, 求める面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB} = \triangle\mathrm{QAP} + \triangle\mathrm{QBP} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-(-1)\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot \frac{9}{4} \\ &= \mathbf{\frac{27}{8}}\end{aligned}$$



問題 4 (1) 特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+a=0$ を解くと, $\lambda=-1\pm\sqrt{1-a}$ である.
今, $a>1$ であるから, $\sqrt{1-a}=\sqrt{a-1}i$ なので, 一般解は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C_1 e^{-x}\cos(\sqrt{a-1}x) + C_2 e^{-x}\sin(\sqrt{a-1}x)} \\ &= \boldsymbol{e^{-x}(C_1\cos(\sqrt{a-1}x) + C_2\sin(\sqrt{a-1}x)),} \quad \boldsymbol{(C_1, C_2} \text{ は任意定数}\boldsymbol{)}\end{aligned}$$

(2) $y(0)=1$ より, $e^{-0}(C_1\cos 0 + C_2 e^{-0}\sin 0) = 1$ なので, $C_1=1$.
また,

$$\begin{aligned}y' = &-e^{-x}(C_1\cos(\sqrt{a-1}x) + C_2\sin(\sqrt{a-1}x)) \\ &+\sqrt{a-1}e^{-x}(-C_1\sin(\sqrt{a-1}x) + C_2\cos(\sqrt{a-1}x))\end{aligned}$$

[*55] ただし, この公式は所謂「受験数学」で頻用されるテクニックでこれを好まない先生も居られる (筆者は学生時代, 実際に御会いしたことがある) ので, 検算に使うのが賢明かも知れない.

において, $x=0$ を代入して

$$-1=-(C_1\cos 0+C_2\sin 0)+\sqrt{a-1}(-C_1\sin 0+C_2\cos 0)$$

よって, $C_1=1$ より, $\sqrt{a-1}C_2=0$ となり, $C_2=0$. よって, $\boldsymbol{y=e^{-x}\cos(\sqrt{a-1}x)}$

(3) $e^{-\pi}\cos(\sqrt{a-1}\pi)=0$ より, $e^{-\pi}>0$ から, $\cos\sqrt{a-1}\pi=0$.

つまり, $\sqrt{a-1}\pi=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, ($n$ は整数) となるので, 両辺を π で割って 2 乗し, 整理すれば,

$$a=1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2=\boldsymbol{n^2+n+\frac{5}{4},\quad (n\text{ は整数})}$$

となる.

20 ある特殊な数列 (無限級数) の解法

平成 24 年の問題 1(3) の計算 (47 頁) について, 補足を述べる. $a_n = n \cdot r^{n-1}$ の形の数列, あるいは更に一般に $a_n = b_n \cdot r^{n-1}$, (b_n は等差数列) の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot r^{k-1}$ について,

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot r + 3 \cdot r^2 + 4 \cdot r^3 + 5 \cdot r^4 + \cdots + n \cdot r^{n-1} \\
rS_n &= \qquad\quad 1 \cdot r + 2 \cdot r^2 + 3 \cdot r^3 + 4 \cdot r^4 + \cdots + (n-1) \cdot r^{n-1} + n \cdot r^n \\
S_n - rS_n &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot r + 1 \cdot r^2 + \cdots + r^{n-1} - n \cdot r^n \\
&= \frac{1 - r^n}{1 - r} - n \cdot r^n
\end{aligned}
$$

となる. 特に, $r < 1$ のとき, $\lim_{n \to \infty} (1-r)S_n = \frac{1}{1-r}$. よって, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot r^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$
一般の場合でも同様に $S_n - rS_n$ の形を計算すれば良い.

21 平成 26 年度問題 1 について

平成 26 年度問題 1 の別解について, やや不親切であるかもとの畏れもあったので, もう少し解説を加えていこう. さて, この問題は $m + n$ 個の玉の中から先に赤玉がなくなる確率であるから, これを最後に白玉だけが残る確率と解釈すれば良いというのはそれ程問題はないと考えられる. では最後に「最後に白玉を取り出す確率と最初に白玉を取り出す確率が等しい」ということについて考えてみよう.

この問題は次々に玉を取り出す試行について考えているが, 次のような問題ではどうだろうか.

問題. 外れが m 本, 当たり n 本で合計 $(m+n)$ 本のくじがある. このくじを $(m+n)$ 人が順に引いていくものとする. ただし, くじは戻さないものとする. k 番目に引く人の当たる確率を求めよ.

この問題においては最初の人が当たる確率が $\frac{n}{m+n}$ であることはすぐに解る. では 2 番目が当たる確率を考えてみよう. これは条件付確率を考えれば良い. 1 人目が当たる事象を A_1, 2 人目が当たる事象を A_2 とする. すると,

(イ) $P_{A_1}(A_2)$, つまり 1 人目が当たった条件下で 2 人目が当たりくじを引く確率は, 当たりくじが 1 本減っているので $\frac{n-1}{m+n-1}$ である.
(ロ) $P_{\overline{A_1}}(A_2)$, つまり 1 人目が外れた条件下で 2 人目が当たりくじを引く確率は, 当たりくじの本数が減っていないので $\frac{n}{m+n-1}$ である.

ゆえにこのとき

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) \\
&= \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1} + \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n-1} \\
&= \frac{n(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)} = \frac{n}{m+n}
\end{aligned}
$$

A_k を k 人目が当たる事象と考えるとき, 今と同様に考えると $P(A_k)$ を求めるのは存外に難しく, 極めて複

雑な計算となるが[*56], 次のように考えることができる.

まず, $m+n$ 本のくじが並んでいる状況を考えてみよう. くじ $m+n$ 本のくじの並び方は ${}_{m+n}\mathrm{C}_n$ 通りある. このうち, k 番目に当たりくじが並ぶ方法と考えれば, ${}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1}$ 通りなので, 求める確率は,

$$\frac{{}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n} = \frac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}{\dfrac{(m+n)!}{m!n!}} = \frac{n}{m+n}$$

となる.

また, 解釈の仕方としては以下のように考えても良い. まず, $m+n$ 人全員にくじを配る. 一人ずつ開いていって $k-1$ 人目までのくじを当たったかどうかを知りつつ一喜一憂しながら自分のくじを開こうが, 全員一緒に開こうが, 既にくじは引いているのでその結果は既に手許にある. 後者の場合, 確率は $\dfrac{n}{m+n}$ であるし, 前者と後者の間では試行としての変化はないのでやはり $\dfrac{n}{m+n}$ である.

22 令和 5 年度問題 4(3) について

問題 4(3) は A^n を求めて, その $\mathrm{tr}(A^n)$ を直接計算して... という流れであった. 実は他にも一般論で話を展開できる.

まず一般に行列 A の固有値 λ とそれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える.

$$A^n\boldsymbol{x} = A^{n-1}\lambda\boldsymbol{x} = A^{n-2}\lambda^2\boldsymbol{x} = \cdots = \lambda^n\boldsymbol{x}$$

であるから, 固有ベクトルは共通して $\boldsymbol{x}$ であり, 固有値は λ^n となる. この問題では A の固有値が $3, 7$ であったので, A^n の固有値はは $3^n, 7^n$ である.

また, A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ となる. つまり $\mathrm{tr}(A)$ の値は固有値の総和となる. 実際, $A = (a_{ij})$ に対する固有値を $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ とすると,

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix} = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$$

である. ここで, 両辺の x^{n-1} の係数を比較すると (行列式の計算については定義に基いて考える必要がある), $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ となる. よって, A^n の固有値が $3^n, 7^n$ なので, $\mathrm{tr}(A) = 3^n + 7^n$ を得ることになる.

23 講評

令和 5 年度においては 1 問目が確率, 2 問目が微分方程式, 3 問目が微積分, 4 問目が線形代数であったが, 令和 6 年度においては 1 問目が微分 (2 変数), 2 問目が線形代数, 3 問目が確率, 4 問目が重積分の問題であった. 今年は微分方程式が出ていないが, これは珍しいことである.

また, 問題難易度の順に並べたように思われる.

[*56] 解答の筋が悪かったのか, 条件付確率を用いた解答の煩雑さを厭う筆者はこれを断念した.

問題は全体として傾向がやや変わったように見える. 問題 1 以外の大問では, 前問が解けなくとも次の問題の解答に差し支えがないような構成となっている.

問題 1 は偏微分で, 極値を求める問題である. 複雑な構成の関数ではないので, 完答しておきたいところである.

問題 2 は a の値によって状況が変化する問題であるが, 2 行目が全て a なので, 小問毎にかなり解答し易い形になっているので, 計算に気を付けつつ解答していきたいところである (計算ミスを犯してしまいそうなので見つけたら御連絡をお願いします).

問題 3 は確率の問題である. 同時に 3 枚引くという試行なので, 全事象を ${}_{20}\mathrm{C}_3$ 通りとしようかとも考えたが, (3) の解答がうまくいかず, 1 枚ずつ 3 回引く試行と同等である, という解答にしておいた.

問題 4 は重積分の問題である. 極座標に変換するだけで, (1), (2) は計算すれば十分である. である. 最後の問題は絶対値の外し方 (中身の符号での場合分け) に慣れておらず, 機械的に $y - x$ と同じように計算して 0 などという解答にならないように気を付けたい.

平成 22 年度, 平成 20 年度では行列と確率が融合した問題であった. また平成 19 年度は 5 問あるがそれ以外の年度では 4 問ずつである. 過去においては行列・確率・微積分・微分方程式から 1 題ずつ, という傾向であったが, 平成 28 年度では行列の問題は出題されず, 微積分の分野から, 最大・最小と重積分の問題が 1 題ずつ出題された. 平成 29 年度から令和 5 年度までは行列・確率・微積分・微分方程式の 4 題であったが, 令和 6 年度は偏微分・行列・確率・重積分となった. 今年は例外と見るのが妥当であると考えられ, 来年度はやはり微分方程式・微積分・行列・確率の 4 題から出題される可能性が高いのではないであろうか.

平成 29 年度においては, 確率 $>$ 微積分 $>$ 行列 $=$ 微分方程式 の印象である.

平成 30 年度においては, 確率 $\geqq$ 微分方程式 $>$ 行列 $=$ 微積分 といったところであろうか.

平成 31 年度以降, 確率 $\geqq$ 微分方程式 $>$ 行列 $=$ 微積分 の傾向は変わっていない印象であった.

令和 5 年度においては, 線形代数 $\geqq$ 微積分 $\geqq$ 微分方程式 $\geqq$ 確率

令和 6 年度においては, 偏微分 $\geqq$ 線形代数 $\geqq$ 確率 $\geqq$ 重積分 と, おおむね問題順の難易度という印象がある.

受験の際には行列・微積分の 2 問をまず解いてから, (微分方程式?)・確率の小問に取り掛かるのが効率的であったと考えられる.

尤も, 限られた時間内で全問解答しようとして, 却って効率を落とす, というのはあまり利口とは言えない. 一旦全問をざっくりと見た上で自分が解けそうな問題から手を付けるというのが定石と言える. 特に近年難化しつつある微積分の場合, 小問の 1 問目, 2 問目辺りに手を付けて最後の小問の難易度が高いというパターンが多いので, それは後回しにするのも良いであろう.

近年確率は易化しているものの, 学生からの意見を聞くと, 問題文をしっかりと読む癖を付けなければ確率は答え辛い問題のようである. 普段から問題文を丁寧に読み, ある事象を抽象化し, 表現する訓練を積む必要があるだろう (特に平成 21 年度の問題は数値は「直感的には明らか」という前提でそれを定式化する能力を見ている良問である).

行列の問題に関しては計算が多め (平成 22 年度は確率と行列の融合問題であったので除く) の問題が多い. 具体的な行列の行列式, 固有値, 固有ベクトル, 行列のかけ算など理論的には平易ではあっても, 計算ミスをおかしがちであるので, しっかりと計算練習を積んでおくことが肝腎である.

微積分の問題では積分する領域などの図を描く問題が出ている. また, 例えそのような図を描けという設問が無くとも, 自分で図を描くことは理解を助ける (平成 27 年度の設問 3, 平成 26 年度の設問 4, 平成 25 年度の設問 3, 平成 23 年度の設問 3, 平成 19 年度の設問 3, 平成 18 年度の設問 3 など). 平成 25 – 27 年度の傾向を

見ると計算量も多いので, 完答せずとも, 「何を計算すれば良いか」という程度の解答を作成できるよう丁寧な解答を心掛けたい.

微分方程式は過去問を見るに, 本質的に容易な問題であるから, 計算ミスなどに気を付けてここで得点を取るようにしたい. とは言え近年の傾向として連鎖律などを利用したり, 一見して偏微分方程式となっているなど, 微積分における変数の違いをしっかりと理解していない受験生にとっては難問であろう (そこを見抜けば簡単な問題なのだが).

最後に恥ずかし乍ら, 解答作成の際にも多くのミスを犯してしまった. あくまで個人が無償で作成しているものであることを鑑み, 御容赦頂きたい. 同時に, ミスを御指摘頂いた方々には深く感謝を述べたいと思う. また, 今後も受験生諸賢はミスを発見した場合には是非ご連絡頂きたい.

2024 年 2 月 28 日, 田原喜宏