

全学科共通 数学

[1] 曲線 $y = x^3 - 5x$ 上に点 A(1, -4) をとる. 次の問い合わせに答えよ.

- (1) 点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 曲線 $y = x^3 - 5x$ と接線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

【解答】 [40点]

(1) $y' = 3x^2 - 5$

$x = 1$ のとき $y' = -2$

よって, 点 A(1, -4) における接線の方程式は

$y - (-4) = -2(x - 1)$

すなわち, $y = -2x - 2$

(2) 曲線と接線の共有点の x 座標を求める.

$x^3 - 5x = -2x - 2$ を解くと, $x = 1, -2$

$-2 \leq x \leq 1$ で $x^3 - 5x \geq -2x - 2$ であるから, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(x^3 - 5x) - (-2x - 2)\} dx \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

全学科共通 数学

[2] 関数 $y = 2^{2x} - 2^{x+2} + 5$ ($-3 \leq x \leq 4$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $t = 2^x$ とおくとき、 y を t の式で表せ。
- (2) y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

【解答】 [40 点]

(1) $y = t^2 - 4t + 5$

(2) t の範囲は $\frac{1}{8} \leq t \leq 16$ である。

従って、 $y = (t - 2)^2 + 1$ となることから、
 y は $t = 16$ 、すなわち $x = 4$ のとき
最大値 197 をとる。

全学科共通 数学

[3] $\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法を用いて示せ.

【解答】 [20 点]

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する.

すなわち, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ は既約分数) であると仮定する.

$$\sqrt{2}n = m$$

$$2n^2 = m^2$$

より, m は偶数である. $m = 2m'$ と表せるので,

$$2n^2 = 4m'^2$$

$$n^2 = 2m'^2$$

よって n も偶数である. m と n が共に偶数だから, $\frac{m}{n}$ が既約分数であることに矛盾する.

以上より $\sqrt{2}$ は無理数である.