nearly stable process に対するディリクレ形式と加法汎関数の確率解析 (土田兼治氏 (防衛大) との共同研究)

田原喜宏

長岡工業高等専門学校 一般教育科

2011 年度ポテンシャル論研究集会
於 岐阜大学

定義

表象 $\phi(|\xi|^2) = |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)$ $(0 < \alpha < 2)$ で定まる $\mathbb{R}^d$ 上の擬微分作用素:

$$\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2} l(-\Delta)$$

を考える. ここで, $l(\cdot)$ は無限遠方で slowly varying な関数, すなわち

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{l(t\lambda)}{l(\lambda)} = 1 \quad \text{for any } t > 0.$$

を満たすものとする.

本講演では上記の擬微分作用素に対応する Dirichlet 形式の性質, 及び対応する Lévy 過程, 加法汎関数の漸近挙動について述べたい.

一般論により, $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2} l(-\Delta)$ には,

半群 $\{P_t\}_{t>0}$: $P_t f = e^{t\mathcal{L}} f$

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(u - P_t u, v), \\ \mathcal{F} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \exists \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(u - P_t u, u) < \infty \right\} \end{cases}$$

対称 Lévy 過程 $\mathbf{M} = (X_t, \mathbf{P}_x)$:

$$P_t f(x) = \mathbf{E}_x[f(X_t)]$$

が存在する.
この対称 Lévy 過程 $\mathbf{M}$ を **nearly stable process** と呼ぶ.

例

- $\phi(|\xi|^2) = |\xi|^\alpha$ (fractional Laplacian)
  $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$
  fractional Laplacian に対応する Lévy 過程:$\mathbf{M} = (X_t, \mathbf{P}_x)$ を
  α-stable process という.
- $\phi(|\xi|^2) = |\xi|^\alpha(\log(1 + |\xi|^2))^{\beta/2}$, $0 < \beta < 2 - \alpha$.
  $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}(\log(1 + (-\Delta)))^{\beta/2}$

α-stable process に近い性質を持つので "nearly stable process" と名付けた.

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$:nearly stable process (表象 $\phi(|\xi|^2)=|\xi|^\alpha l(|\xi|^2)$),
$(\mathcal{E}^{(\alpha)},\mathcal{F}^{(\alpha)})$:$\alpha$-stable process,
それぞれによって生成される Dirichlet 形式,
また, $\mathcal{E}_1(u,u)=\mathcal{E}(u,u)+(u,u)$ とする.

定理 (T.-Tsuchida '11)

1. $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda)=+\infty$, $\alpha<\alpha'<2$
$\Rightarrow \exists C_l, C_{\alpha'}>0$,
$$C_l\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)\le \mathcal{E}_1(u,u)\le C_{\alpha'}\mathcal{E}_1^{(\alpha')}(u,u)$$
2. $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda)=\gamma>0$
$\Rightarrow \exists C_\gamma>0$,
$$C_\gamma^{-1}\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)\le \mathcal{E}_1(u,u)\le C_\gamma\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)$$
3. $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda)=0$, $0<\alpha''<\alpha$
$\Rightarrow \exists C_l, C_{\alpha''}>0$,
$$C_{\alpha''}\mathcal{E}_1^{(\alpha'')}(u,u)\le \mathcal{E}_1(u,u)\le C_l\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)$$

Outline of Proof.

$\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda) = +\infty$ の場合:
$\hat{u}(\xi)$ を u の Fourier 変換とすると,

$$\mathcal{E}(u,u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

$$\mathcal{E}^{(\alpha')}(u,u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\alpha'}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (\alpha' > \alpha)$$

$0 \in K$: コンパクト, を適当に取れば, l が slowly varying なので K^c 上で $|\xi|^\alpha l(|\xi|^2) < |\xi|^{\alpha'}$ とできる. K 上では L^2 ノルムで評価できるので

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,u) &= \int_K |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{K^c} |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\le M_K(u,u) + \mathcal{E}^{(\alpha')}(u,u) \quad (M_K : \text{const.}) \\ &\le C_{\alpha'}\mathcal{E}_1^{(\alpha')}(u,u)\end{aligned}$$

□

定理 (Revuz 対応)

μ を $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな測度とする．このとき，ある正値加法汎函数(PCAF)A_t^μ が一意的に存在して，任意の γ 超過函数 h, $(\gamma \geq 0)$ に対し，

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E}_x \left(\int_0^t f(X_s) dA_s^\mu \right) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) h(x) d\mu.$$

となる．

注

$\mu(dx) = V(\cdot)dx$ と表される場合は単純に

$$A_t^V = \int_0^t V(X_s) ds.$$

最も単純な例は，$\mu(dx) = 1_K(\cdot)dx$, (ただし K はコンパクト集合) に対し，

$$A_t^V = \int_0^t 1_K(X_s) ds \quad (\text{時刻 } t \text{ までに粒子 } X_t \text{ が } K \text{ に滞在した時間})$$

問題 (加法汎関数 A_t^μ の大偏差原理)

対数モーメント母関数 (LMGF) を次のように定める:

$$\Lambda(\theta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{E}_x[\exp(\theta A_t^\mu)] \quad \text{(極限が存在する場合)}$$

1. $G \subset \mathbb{R}$: 開集合に対して,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x\left(\frac{A_t^\mu}{t} \in G\right) \geq -\inf_{\lambda\in G} I(\lambda).$$

2. $F \subset \mathbb{R}$: 閉集合に対して,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x\left(\frac{A_t^\mu}{t} \in F\right) \leq -\inf_{\lambda\in F} I(\lambda),$$

ここで, $I(\lambda) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}(\lambda\theta - \Lambda(\theta))$.

確率論における極限定理の1つ.

(大偏差原理の直感的な理解)

M が過渡的 $(\mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty}|X_t| = \infty) = 1$ for any $x \in \mathbb{R}^d)$ な場合, 確率的には,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_t^{1_K}}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t 1_K(X_s)ds = 0$$

(時間が充分に経てば, 粒子は無限遠方に行ってしまうので, $1_K(X_t) = 0$)
すると集合 $0 \notin B \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$\mathbf{P}_x\left(\frac{A_t^{1_K}}{t} \in B\right) \sim \exp\left(-t\inf_{\lambda\in B} I(\lambda)\right)$$

0 に収束する速さを記述するので, $I(\cdot)$ をレート函数と呼ぶ.

μ を非負の測度とする.

定義 (スペクトル関数)

スペクトル関数 $C(\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を以下に定義する;

$$C(\theta) = -\inf\left\{\mathcal{E}(u,u) - \theta\int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu : u \in \mathcal{F}, \|u\|_2 = 1\right\}$$

定義 (ground state)

$$\mathcal{E}(h,h) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) : \int u^2 d\mu = 1\right\}$$

を満たす関数 h を **ground state** という.

μ は "十分小さい"(コンパクトな台を持つ有界な非負の可測函数を用いて表される程度の) 測度とする.

定理 (スペクトル関数の微分可能性, T.-Tsuchida '11)

1. $\mathbb{M}$ が再帰的な場合,
つまり $\mathbf{P}_x(\liminf_{t\to\infty}|X_t|=0)=1$ が成立するとき,
$C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.
2. $\mathbb{M}$ が過渡的な場合, ground state について $h\notin L^2(\mathbb{R}^d)$ であれば $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.

定理 (スペクトル下限の L^p 独立性, Takeda '08, T.'09)

$$-\inf\left\{\mathcal{E}(u,u)-\theta\int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu : u\in\mathcal{F}, \|u\|_2=1\right\}$$
$$=C(\theta)=\lambda(\theta)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbf{E}_x\left[\exp(\theta A_t^V)\right]$$

定理 (Gärtner-Ellis の定理)

対数モーメント母関数 $\Lambda(\theta)$ が $\mathbb{R}$ 上微分可能であるならば, 大偏差原理が成立する.

nearly stable process に対して $C(\theta)$ は微分可能であり, なおかつ

$$C(\theta) = \Lambda(\theta).$$

よって, 次の加法汎関数の大偏差原理が成立する.

定理 (加法汎函数の大偏差原理, T.-Tsuchida. '11)

スペクトル関数は微分可能とする.

1. $G \subset \mathbb{R}$: 開集合に対し,
$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x\left(\frac{A_t^V}{t} \in G\right) \geq -\inf_{\lambda\in G} I(\lambda).$$
2. $F \subset \mathbb{R}$: 閉集合に対し,
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x\left(\frac{A_t^V}{t} \in F\right) \leq -\inf_{\lambda\in F} I(\lambda).$$