Differentiability of Spectral Functions for Nearly Stable Processes and Large Deviations

田原喜宏 [1]　土田兼治 [2]

[1] 長岡工業高等専門学校 一般教育科

[2] 防衛大学校 総合教育学群数学教育室

2011 年度日本数学会秋季総合分科会

定義

$\mathbb{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ を Laplace exponent $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2} l(\lambda)$ $(0 < \alpha < 2)$ を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の対称 Lévy 過程とする．ここで, $l(\cdot)$ は無限遠方で slowly varying な関数, 即ち

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{l(t\lambda)}{l(\lambda)} = 1 \quad \text{for any } t > 0.$$

を満たすものとする．
このような Lévy 過程 $\mathbb{M}$ を **nearly stable process** と呼ぶ．

例

- $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2}$ (*symmetric α-stable process*)
- $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2}(\log(1 + |\lambda|))^{\beta/2}$, $0 < \beta < 2 - \alpha$.

$\{P_t\}_{t>0}$ を $\mathbb{M}$ の半群;

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)].$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbb{M}$ によって生成される Dirichlet 形式;

$$\begin{cases} \mathcal{F} := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - P_t u, u) \ \text{ exists.} \right\}, \\ \mathcal{E}(u,v) := \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - P_t u, v), \quad u, v \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

とする.

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$:nearly stable process
(Laplace exponent $\phi(\lambda)=\lambda^{\alpha/2}l(\lambda)$),
$(\mathcal{E}^{(\alpha)},\mathcal{F}^{(\alpha)})$:$\alpha$-stable process,
それぞれによって生成される Dirichlet 形式,
また, $\mathcal{E}_1(u,u)=\mathcal{E}(u,u)+(u,u)$ とする.

定理 (T.-T.'11)

1. $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda)=+\infty$, $\alpha<\alpha'<2$
   $\Rightarrow \exists C_l, C_{\alpha'}>0$,
   $C_l\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)\le\mathcal{E}_1(u,u)\le C_{\alpha'}\mathcal{E}_1^{(\alpha')}(u,u)$
2. $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda)=\gamma>0$
   $\Rightarrow \exists C_\gamma>0$,
   $C_\gamma^{-1}\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)\le\mathcal{E}_1(u,u)\le C_\gamma\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)$
3. $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda)=0$, $0<\alpha''<\alpha$
   $\Rightarrow \exists C_l, C_{\alpha''}>0$,
   $C_{\alpha''}\mathcal{E}_1^{(\alpha'')}(u,u)\le\mathcal{E}_1(u,u)\le C_l\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)$

V を非負の可測関数とする.

定義 (スペクトル関数)

スペクトル関数 $C(\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を以下に定義する;

$$C(\theta) = -\inf\left\{\mathcal{E}(u,u) - \theta\int_{\mathbb{R}^d} u^2 V\,dx : u \in \mathcal{F}, \|u\|_2 = 1\right\}$$

定義 (ground state)

$$\mathcal{E}(h,h) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) : \int u^2 V\,dx = 1\right\}$$

を満たす関数 h を **ground state** という.

V は "十分小さい"(コンパクトな台を持つ有界な非負の可測関数といった程度) とする.

定理 (スペクトル関数の微分可能性, T.-T. '11)

1. $\mathbb{M}$ が再帰的な場合, $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.
2. $\mathbb{M}$ が過渡的な場合, *ground state* について $h \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ であれば $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.

$$A_t^V = \int_0^t V(X_s)ds,$$

とおく. このとき,

定理 (スペクトル下限の L^p 独立性, Takeda '08, T.'09)

$$C(\theta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left[\exp(\theta A_t^V)\right]$$

$I(\lambda) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\theta\lambda - C(\theta)\}$ (スペクトル関数の Legendre 変換) とおく.
Gärtner-Ellis の定理により, 次の加法汎関数の大偏差原理が成立する.

定理 (加法汎函数の大偏差原理, T.-T. '11)

スペクトル関数は微分可能とする.

1. $G \subset \mathbb{R}$: 開集合に対し,
$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^V}{t} \in G \right) \geq - \inf_{\lambda \in G} I(\lambda).$$
2. $F \subset \mathbb{R}$: 閉集合に対し,
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^V}{t} \in F \right) \leq - \inf_{\lambda \in F} I(\lambda).$$