Strong and weak disorder for Lévy directed polymers

田原 喜宏 (東北大学大学院理学研究科)
土田 兼治 (東北大学大学院理学研究科)
三浦 充晴 (青森県立三沢商業高等学校)

本講演では, ポアソン分布に従うランダム環境下における対称レヴィ過程の漸近挙動についての考察を行う. これまで, ランダムウォークやブラウン運動を用いたモデルについての研究は, 主に F. Comets 氏, 志賀徳造氏, 吉田伸生氏らによって研究されており, 主な論文として [2] や [3] などがある. 特に, ブラウン運動についての定式化は [3] が初めてのものである. また, 最近になって [1] など, 対称安定過程についての研究も始められた.

$(\{\omega_t\}_{t\geq 0}, P)$ を 0 を出発点とする $\mathbb{R}^d$ 上の対称レヴィ過程として, そのシンボルを $p(\xi)$ とおく. すなわち, $P[e^{-i\omega_t\cdot\xi}] = e^{-tp(\xi)}$ である. ここで, $P[\cdot]$ は P に関する期待値を表すものとする. また, 後に定義する確率測度 Q に対しても同様に表記する.

V_t を対称レヴィ過程のポリマー, すなわち, $V_t := V_t(\omega) := \{(s,x); s \in (0,t], x \in U(\omega_s)\}$ とおく. ここで, $U(x)$ は x を中心とする体積 1 の閉球である.

次にランダムな環境について述べる. $\mathcal{M}$ を正の整数値を取る $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上の測度の集合とする. **ポアソンランダム測度** Q を以下に定義する. Q は σ 集合族 $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ 上の確率測度で, 以下の性質を満たすものである:
有界で互いに素であるような任意の $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ に対し,

$$Q\left(\bigcap_{i=1}^n \{\eta(A_i) = k_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \exp(-|A_i|)\frac{|A_i|^{k_i}}{k_i!}$$

である. このとき, $\eta \in \mathcal{M}$ は $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上の媒質の 1 つの配置を表している. η_t を $\eta \in \mathcal{M}$ の $(0,t] \times \mathbb{R}^d$ への制限として, $\mathcal{G}$ の部分 σ 集合族 $\mathcal{G}_t$ を $\mathcal{G}_t := \sigma[\eta_t(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)]$ で定める.

ここで, β をパラメータとする**分配関数** Z_t を $Z_t := P[\exp(\beta\eta(V_t))]$ で定める. このとき, $Q[Z_t] = \exp((e^\beta - 1)t)$ である. $\lambda := e^\beta - 1$ として, **正規化された分配関数** W_t を $W_t := e^{-\lambda t}Z_t$ で定める. この正規化された分配関数 W_t は $(\mathcal{M}, \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}, Q)$ に関するマルチンゲールである. ゆえにマルチンゲールの収束定理から, $W_\infty = \lim_{t\to\infty} W_t$ が Q-a.s. で存在しており, 更に, コルモゴロフの 0-1 法則により, 以下の 2 つの状況

しか起こり得ない.

$$Q(W_\infty = 0) = 1, \tag{1}$$
$$Q(W_\infty > 0) = 1. \tag{2}$$

定義．(1) が成立する事を**環境による摂動が強い相**, (2) が成立する事を**環境による摂動が弱い相**と呼ぶ.

注．(1) の状況は元のレヴィ過程と非常に異なる状況であり, (2) の状況は元のレヴィ過程と似通った状況である事を意味する.

ブラウン運動についての研究を行った [3] においては, $d = 1, 2$(即ちブラウン運動が再帰的) の時, 任意の $\beta \neq 0$ に対し, (1) が成立し, $d \geq 3$(即ちブラウン運動が推移的) の時, ある $\beta_0 > 0$ が存在して, 任意の $\beta \in (-\infty, \beta_0)$ に対し, (2) が成立する事が示されている.

我々の示した定理は以下のものである:

定理．$(\{\omega_t\}, P)$ がフェラー性を持つと仮定する.

(i) $d = 1$ とする. $1 < \alpha \leq 2$ に対し, $\limsup_{\xi \to 0} p(\xi)\|\xi\|^{-\alpha} < \infty$ であるならば, 任意の $\beta \neq 0$ に対し, (1) が成立する.

(ii) もし $(\{\omega_t\}, P)$ が推移的であるならば, ある $-\infty \leq \beta_0 < 0 < \beta_1 < \infty$ なる β_0 と β_1 が存在して, 任意の $\beta \in (\beta_0, \beta_1)$ に対し, (2) が成立する.

注．定理の (i) の仮定を満たす対称レヴィ過程は再帰的である. これと (ii) の仮定を併せると, ランダム環境の摂動が強い/弱いという事は元の対称レヴィ過程が, 再帰的/推移的であるという事に大きく依存している事が解る.

前述の定理は, [3] の結果の部分的な拡張となっており, α 安定過程, 相対論的 α 安定過程, 幾何学的 α 安定過程等の対称レヴィ過程にも適用できる.

参考文献

[1] F. Comets. Weak disorder for low dimensional polymers: The model of stable laws. 2006. preprint.

[2] F. Comets, T. Shiga, and N. Yoshida. Directed polymers in random environment: Path localization and strong disorder. *Bernoulli*, 9:705–723, 2003.

[3] F. Comets and N. Yoshida. Brownian directed polymers in random environment. *Comm. Math. Phys.*, 254:257–287, 2005.