Differentiability of spectral functions for nearly stable processes and large deviations

田原 喜宏　(長岡工高専)*1
土田 兼治　(防衛大)*2

本講演では, neary stable process という対称 α 安定過程を含む対称 Lévy 過程のスペクトル関数の微分可能性及び, 加法汎函数の大偏差原理について述べる.

$\mathbf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ を Laplace exponent $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2} l(\lambda)$, $(0 < \alpha < 2)$ を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の対称 Lévy 過程とする. ここで $l(\cdot)$ は無限遠方で緩変動であるような関数である. すなわち, $\lim_{\lambda\to\infty} l(t\lambda)/l(\lambda) = 1$, $(t > 0)$ を満たす. 以下, $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2} l(\lambda)$ は **special Bernstein function** であることを仮定する. すなわち, ϕ は Bernstein function であり, $\psi(\lambda) = \lambda/\phi(\lambda)$ もまた, Bernstein function である. このような Lévy 過程 $\mathbf{M}$ を **nearly stable process** という. $\lambda \equiv 1$ のとき, $\mathbf{M}$ は対称 α 安定過程である.

$\{P_t\}_{t>0}$ を $\mathbf{M}$ の推移半群 $P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y) f(y) dy$, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbf{M}$ に対応する **Dirichlet 形式**:

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - P_t u, u) < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(u,v) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - P_t u, v), \quad u, v \in \mathcal{F} \end{cases}$$

とする. $\mathbb{R}^d$ 上の測度 μ が**滑らか**であるとは, 任意の γ 超過関数 g $(\gamma \geq 0)$ と正の Borel 可測関数 f に対し,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t f(X_s) dA_s^{\mu} \right] g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) d\mu$$

となる正値連続加法汎函数 A_t^{μ} が存在することを言う. この μ と A_t^{μ} の対応を **Revuz 対応**という.

$$G_\alpha(x,y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t,x,y) dt,$$

$G_0(x,y) = G(x,y)$ とおく. 滑らかな測度 μ に対し, μ の α **ポテンシャル** $G_\alpha \mu(x)$ を

$$G_\alpha \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_\alpha(x,y) \mu(dy).$$

で定義する. 滑らかな測度 μ に対し $\mu_R(\cdot) = \mu(B(R) \cap \cdot)$, $\mu_{R^c}(\cdot) = \mu(B(R)^c \cap \cdot)$ とおく. ここで $B(R)$ は原点中心, 半径 R の開球である.

定義 1. μ を $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな正 Radon 測度とする.

(1) $\lim_{\alpha\to\infty} \|G_\alpha \mu\|_\infty = 0$ のとき, μ は**加藤クラス**に属するという.

(2) 加藤クラスに属する測度 μ が

$$\lim_{R\to\infty} \|G\mu_{R^c}\|_\infty = 0, \quad (\mathbf{M}\text{ が過渡的な場合})$$
$$\lim_{R\to\infty} \|G_1\mu_{R^c}\|_\infty = 0, \quad (\mathbf{M}\text{ が再帰的な場合})$$

を満たすとき, μ は **Green 緊密な加藤クラス**に属するという (以下, $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ と略記する).

本研究は科学研究費 (課題番号:21740109(若手研究 B)) の助成を受けたものである.

*1 e-mail: tawara@nagaoka-ct.ac.jp
web: http://www.nagaoka-ct.ac.jp/~tawara/
*2 e-mail: tsuchida@nda.ac.jp
web: http://www008.upp.so-net.ne.jp/kane-t/

(3) $\mathbf{M}$ は過渡的とする．滑らかな正測度 μ が, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある μ 有限な Borel 集合 $K = K(\epsilon)$ と $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在して,

$$\sup_{(x,z)\in(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)\setminus\triangle}\int_{K^c}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\leq\epsilon$$

となり, $\mu(B) < \delta$ なる任意の可測集合 $B \subset K$ に対し

$$\sup_{(x,z)\in(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)\setminus\triangle}\int_{B}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\leq\epsilon,\quad (\text{ただし}, \triangle=\{(x,x):x\in\mathbb{R}^d\})$$

となるとき, **クラス $\mathcal{S}_\infty$** に属するという．

$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し**スペクトル関数** $C(\theta)$ を以下に定める:

$$C(\theta) = -\inf\left\{\mathcal{E}(u,u)-\theta\int u^2 d\mu : u\in\mathcal{F}, \int u^2 dx = 1\right\}.$$

$\theta^+ = \inf\{\theta > 0 : C(\theta) > 0\}$ とする．

$$\mathcal{E}(h,h) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) : \int u^2 d\mu = 1\right\}$$

を満たす h を **ground state** という．

定理 1 ([2, Theorem 4.1 and Theorem 5.1])**.** $\mathbf{M}$ を特性関数 $\phi(|\xi|^2) = |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)$ を持つ nearly stable process とする．$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し拡張 Dirichlet 空間 $\mathcal{F}_e$ から $L^2(\mu)$ への埋め込みがコンパクトであるとき, ground state h は存在し, $C(\theta)$ は次の性質を持つ．

(1) $\mathbf{M}$ が再帰的な場合, $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である．

(2) $\mathbf{M}$ が過渡的な場合, $\mu \in \mathcal{S}_\infty$ に対し $h \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である．

定理 1 と Gärtner-Ellis の定理 ([1, Theorem 2.5.8]) により, 次の加法汎函数 A_t^μ の大偏差原理が成立する:

定理 2 ([2, Theorem7.2])**.** A_t^μ を $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ の正値加法汎函数で, 定理 1 を満たしているものとする．$I(\lambda)$ を $C(\theta)$ の Legendre 変換, すなわち $I(\lambda) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\theta\lambda - C(\theta)\}$ とする．このとき,

(I) $\mathbb{R}$ の開集合 G に対し,

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\frac{A_t^\mu}{t}\in G\right)\geq -\inf_{\lambda\in G}I(\lambda),$$

(II) $\mathbb{R}$ の閉集合 F に対し,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\frac{A_t^\mu}{t}\in F\right)\leq -\inf_{\lambda\in F}I(\lambda).$$

参考文献

[1] A. Dembo, O. Zeitouni, Large Deviations Techniques and Applications, vol. 38 of Applications of Mathematics (New York), 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] Y. Tawara and K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for nearly stable processes and large deviations, preprint, available at `http://www.nagaoka-ct.ac.jp/~tawara/pdfs/Taw-Tsu.pdf`