Compound Poisson model の Gerber-Shiu 関数

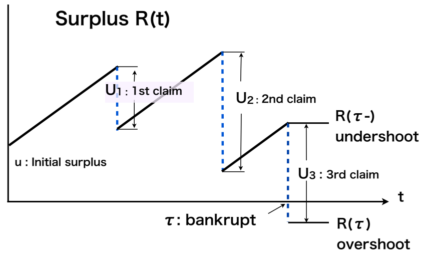
西岡 國雄 (中大商),　中島 禎志 (電機大理工)

1　Gerber-Shiu 関数とは

正の定速ドリフトから, 正の飛躍を持つ複合 Poisson 過程を減じた加法過程 $\{R(t)\}$

$$R(t) = u + t - \sum_{k=0}^{N(t)} U_k, \quad u \geq 0, \quad U_0 \equiv 0, \tag{1.1}$$

を surplus 過程[*1]と呼ぶ: ここで, $\{N(t), t \geq 0\}$ は Poisson rate ρ の Poisson 過程, $\{U_k,\, k = 1, 2, \cdots\}$ は共通分布が F の非負 $i.i.d.$ r.v.'s で $\{N(t)\}$ とは独立. 平均 $\mathbf{E}[U_1] \equiv \mu_F$ の存在と "safty loading $1 - \rho\,\mu_F > 0$" を仮定する.



保険会社の破産時刻を $\tau \equiv \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$ で定義する. すると破産直前の surplus $R(\tau-)$ と破産額 $|R(\tau)|$ を変数とする penalty 関数 $w(x, y)$ を適当に設定し[*2], それを現在価値に割り引いた関数 ϕ で, "保険会社の破産の深刻さ" が定量化される:

$$\phi(u) = \mathbf{E}_u\left[\, e^{-\alpha\,\tau}\; w(R(\tau-),\, |R(\tau)|)\,\right], \quad \alpha \geq 0 \text{ is discount rate.} \tag{1.2}$$

ϕ は, 提案者に因んで Gerber-Shiu 関数と呼ばれ ([3], [4]), 再保険料の算定など多くの応用がある. "u, ρ, F, α と $\phi(u)$ との関数関係" の解明を目標とした研究は盛んに行われているが, F が指数分布およびその類似物以外では, 未だに未解決のままである.

本講演では, w を

$$w(x, y) \equiv I_{\{x>a,\, y>b\}}, \qquad a, b \geq 0 \text{ are arbitrarily fixed constants,} \tag{1.3}$$

とし, F が "δ 分布の凸結合" (*c.f.* 定義 2.1, この空間を $\mathscr{P}_D$ と表記する) であるとき, ϕ の具体形を与える. $\mathfrak{r}(\cdot\,,\cdot)$ を Lévy metric とするとき, $\mathbb{R}^1_+$ 上の確率測度空間 $(\mathscr{P}, \mathfrak{r})$ のなかで $\mathscr{P}_D$ は dense subset だから, $F^\dagger \in \mathscr{P}_D$ で一般の $F \in \mathscr{P}$ を任意精度で近似できる. すなわち "一般の F に対する ϕ の任意精度近似" を, シュミレーションが適用可能な具体型で求める.

2　主結果

Surplus 過程 (1.1) の path を分解することで, ϕ が満たす積分微分方程式 $(*)$ が得られる: $(*)$ は一意解を持つが, それを得るため, Laplace 変換を行う:

$$0 = \widehat{\phi}(s)\left\{\rho\,\widehat{F}(s) - (\rho + \alpha) + s\right\} + \rho\,\widehat{w^\star}(s) - \phi(0), \quad \widehat{\phi}(s) = \int_0^\infty du\; e^{-s\,u}\; \phi(u), \tag{2.1}$$

ここで, $\widehat{w^\star}(s) \equiv \int_0^\infty du\, e^{-s\,u} \int_u^\infty F(dx)\, w(u, x-u)$. とくに, w を (1.3) とすれば,

$$\widehat{w^\star}(s) = \int_{a+b}^\infty F(dx)\, \frac{1}{s}\{e^{-s\,a} - e^{-s\,(x-b)}\}$$

[*1] この加法過程は Cramér-Lundberg モデルと呼ばれ, 時刻 t での保険会社の資産を表す.

[*2] Penalty 関数としては, $w = x - y$,　$w = 1 - \exp\{-(x - |y|) - c\,|y|\}$, $c \geq 0$, なども提案されている.

となる. しかし (2.1) では $\widehat{\phi}(s)$ および $\phi(0)$ が未知である. そこで s に関する方程式

$$\text{(2.2)} \qquad \text{Lundberg eqauiton} \qquad \rho\,\widehat{F}(s)-(\rho+\alpha)+s=0,$$

の正解を r_α (α exponent) とする. $s=r_\alpha$ のとき, (2.1) で $\{\quad\}=0$ となり $\phi(0)$ を得ることが出来る*3:

$$\text{(2.3)} \qquad \phi(0)=\rho\,\widehat{w^\star}(r_\alpha)=\rho\int_{a+b}^\infty F(dx)\,\frac{1}{r_\alpha}\{e^{-r_\alpha\,a}-e^{-r_\alpha\,(x-b)}\}.$$

定義 2.1. F が "δ 分布の凸結合" とは, ある整数 $M>0$, 定数 $0<a_1<\ldots<a_M$, および, 定数 $0<p_k<1,\ k=1,\ldots,M,$ に対し,

$$\text{(2.4)} \qquad F(dx)=\sum_{k=1}^M p_k\,\delta(x,a_k)\,dx, \quad p_1+\cdots+p_M=1,$$

となることである. 但し $\delta(x;a)$ は "位置 a に単位質量がある δ 関数". (2.4) の全体を $\mathscr{P}_D$ で表す. $\diamond$

(2.1), (2.2) の α exponent r_α と $F^\dagger\in\mathscr{P}_D$ であることを利用. 多重指数の記法を用いて,

定理 2.2 (主定理)**.** $\mathscr{P}_D\ni F^\dagger$ は (2.4) とする. $\Rightarrow$ (1.3) にたいする Gerber-Shiu 関数の具体形は

$$\phi(u)=\mathbf{E}_u\left[e^{-\alpha\,\tau}\ I_{\{R(\tau-)>a,\,|R(\tau)|>b\}}\right]=\rho\sum_{k=0}^M\frac{p_k}{r_\alpha}(e^{-r_\alpha\,a}-e^{-r_\alpha\,(a_k-b)})\ I_{\{a+b\le a_k\}}\ K(u)-$$

$$-\sum_{k=0}^M p_k\int_0^u dv\ (I_{\{v\ge a\}}-I_{\{v\ge a_k-b\}})\ I_{\{a+b\le a_k\}}\ K(u-v)$$

$$\text{ここで}\quad K(u)=\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^M}(-\rho)^k\ \frac{\boldsymbol{p^k}}{\boldsymbol{k}!}\ e^{(\rho+\alpha)\,(u-\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle)}\ (u-\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle)^k\ I_{\{u\ge\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle\}}.$$

なお $I_{\{u\ge\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle\}}$ の項があるため, 上記 $K(u)$ の右辺に現れる $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}(\quad)$ は有限和である. $\diamond$

注意 2.3. (i) 一般の $F\in\mathscr{P}$ に対し, (2.2) を代数的に解くことはほぼ不可能. そこで r_α に収束する近似区間列 $\{(\ell_k^\dagger,r_k^\dagger)\}$ を構成するが, $r_{k+1}^\dagger-\ell_{k+1}^\dagger<c\,(r_k^\dagger-\ell_k^\dagger)^2$ となり, その収束は極めて早い.
(ii) 一般の $F\in\mathscr{P}$ に対しは, $F^\dagger\in\mathscr{P}_D$ で "$\mathfrak{r}(F,F^\dagger)<\varepsilon,\quad \mu_F=\mu_{F^\dagger}$" となるものを構成し, その $F^\dagger$ に 定理 2.2 を適用する. $\diamond$

文献

[1] S. Asmussen and H. Albrecher, Ruin Probabilites (2nd ed.), 2010, World Scientific.

[2] Cramér, H., Historical review of Fillip Lundberg's work on risk theory, Skand. Aktua. (Suppl.), 52 (1969), 6-12.

[3] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, Insurance: Mathematics and Economics, 21 (1997), 129-137.

[4] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., On the time value of ruin, Noth American Actuarial J., 2 (1998), 48-72

*3 $\alpha=0$ の場合 $\phi(0)$ の具体型が知られている, [1]. また Wiener-Hope 定理の応用から, $\phi(0)$ を求めることも出来るが, 本質的に無限級数であり, 実際の計算は困難.

古典 Lundberg model の結合分布の一般公式について

佐藤　定夫 *

2017.12.11 東北大学 確率論シンポジウム

1 Lundberg model

N_t を $\nu-$ Poisson process とし Y_j を分布 F の i.i.d. とする.

$$S_t = t - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \tag{1}$$

$S_0 = 0$ なので $k \leq 0$ に対し, 破産時刻を定義する.

$$T_k = \inf\{t > 0; S_t < k\}$$

.

簡単のため $Y > 0$ a.s. とし、F の Laplace 変換 $\phi(\beta)$ は $\beta = 0$ の近傍で analytic とする. また、存続確率 $(P(T_k = \infty))$ が正となる条件

$$\nu E(Y) < 1 \tag{2}$$

を常に仮定する. F は density f をもつとして式を書くが, 一般化は容易である.

We study the following generating function:

$$U(k,\zeta,\beta,\gamma) = E(e^{-\zeta T_k - \beta(k - S_{T_k}) - \gamma(S_{T_{k-}} - k)}) \tag{3}$$

ここで $V_k = k - S_{T_k}$ は overshoot と呼ばれ $V_{k-} = S_{T_{k-}} - k$ は the surplus prior to ruin と呼ばれる (GS). U の逆変換を求めれば, Gerber-Shiu を含む一般の T_k, V_k, V_{k-} の結合分布がわかるがこれが一般の F に対して可能であることを以下に示す.

2 $U, \mathscr{L}U$ formula

Theorem 1.

$$\mathscr{L}U(\alpha,\zeta,\beta,\gamma) = \frac{1}{1 - U(0,\zeta,\alpha,0)} \cdot \frac{U(0,\zeta,\beta,\gamma) - U(0,\zeta,\alpha+\gamma,\gamma)}{\alpha + \gamma - \beta} \tag{4}$$

ここで $\mathscr{L}U$ は $U(k,,,)$ の $(-\infty, 0]$ での $\mathscr{L}$ 変換.

Define

$$Z(\zeta,\gamma) = \lim_{\beta\to\infty} \beta U(0,\zeta,\beta,\gamma) \tag{5}$$

and

$$z(\zeta) = Z(\zeta, 0) \tag{6}$$

Theorem 2. The function $z(\zeta)$ is a positive decreasing convex function and satisfies that

$$z(\zeta) = \nu\phi(\nu + \zeta - z(\zeta)) \tag{7}$$

and

$$z(\zeta) = \nu + \zeta - \frac{\zeta}{1 - U(0,\zeta,0,0)}. \tag{8}$$

*東京電機大学 理工学部 情報システムデザイン学系, sato@u.dendai.ac.jp

Moreover, we have

$$Z(\zeta,\gamma) = \nu\phi(\nu+\zeta+\gamma-z(\zeta)), \tag{9}$$

$$0 < Z(0,\gamma) \le \nu\phi(\gamma) \tag{10}$$

and

$$U(0,\zeta,\beta,\gamma) = \frac{\nu\phi(\beta) - Z(\zeta,\gamma)}{\nu+\zeta+\gamma-z(\zeta)-\beta} \tag{11}$$

3 density of (T_k, V_k, V_{k-})

Define

$$G_0(t,s) = \delta_0(t-s) + \nu s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu t)^{n-1}}{n!} f^{n*}(t-s). \tag{12}$$

Then we have

Theorem 3. The density of (T_0, V_0, V_{0-}) is

$$f_0(t,x,s) = \nu e^{-\nu t} G_0(t,s) f(x+s). \tag{13}$$

Define

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu t)^{n-1}}{n!} f^{n*}(t). \tag{14}$$

Define

$$G_1(k,t) = \int_k^0 dv g(t-v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu v)^n}{n!} f^{n*}(v-k) \tag{15}$$

Theorem 4. The density of (T_k, V_k, V_{k-}) is

$$f_k(t,x,s) = \nu e^{-\nu t} f(x+s) \left(1_{\{s+k\ge 0\}} G_0(t,s+k) + \nu \int_k^{(s+k)\wedge 0} dv \int_0^t du G_0(t-u, s+k-v) G_1(v,u) \right) \tag{16}$$

Thus V_k have the tail distribution of f. T_k and V_k are conditionally independent given V_{k-}.

参考文献

[Mi] T. ミコシュ, 山岸訳, 損害保険数理, 丸善,2012

[Pra] Prabhu,N.U.,Queues and Inventories, New York,John Wiley &Sons,1965.

[As] Asmussen & Albrecher,Ruin Probabilities,World Scientific,Singapore,2010

[WW] Whittaker & Watson,A course of Modern Analysis,London,Cambridge Univ.,1927.

[B] Berndt, Bruce C., Ramanujan's Notebooks, Part I, New York, Springer,2005.

[F] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Aplications, Vol. II, John Wiley & Sons, 1971.

[GS] Gerber, H. U. and Shiu, E., On the time value of ruin, North American Actuarial Journal, 9 (2005), 49-69.

[L] Lundberg, F., Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. Skand. Aktua., 13 (1930), 1-83.

[NI] Nishioka, K. and Igarashi, T., Non-ruin probability of an insurer under the Lundberg model, 京都大学, 数理研考究録, 1903 (2014), 140–147.

[NNS] 西岡國雄, 中島禎志, 佐藤定夫, 保険会社の存続問題２, 日本数学会秋季大会, 京都産業大学,2015

[S] 佐藤定夫,Lundberg model と Ramanujan, 数理科学会論文集,Vol.17,No.1,2016,21-24

Large financial market における無裁定理論

浜口 雄史 *　京都大学理学研究科数学教室 修士課程 2 年

古典的なマーケットモデルは, 有限個の株式などの危険資産を仮定し, その割引価格を有限次元確率過程でモデル化する. 一方本講演では可算無限個の証券を仮定した large financial market における無裁定理論について, 特に基準財変更との関連についての新しいアプローチを紹介する.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとする. 可算無限個の危険資産の価格過程を実数値セミマルチンゲールの列 $\mathbb{S} = (S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ で表し, これを large financial market と呼ぶ. また相異なる自然数からなる有限集合 K に対し, $\mathbb{S}^K = (S^n)_{n\in K}$ を K-small market と呼ぶ. 補助的に安全資産 (基準財) の価格過程として $S^0 \equiv 1$ を考える. すなわちすべての価格は基準財 S^0 による割引価格を表すものとする.

まず, 各 small market $\mathbb{S}^K$ における投資戦略を, 古典的なマーケットモデルと同様に定義する.

定義 1. $\mathbb{R}^{|K|}$-値可予測過程 H で, 有限次元セミマルチンゲールに関するベクトル確率積分の意味で $\mathbb{S}^K$-*integrable* ($H \in L(\mathbb{S}^K)$ と書く) なものを, *small market* $\mathbb{S}^K$ における投資戦略 (*trading strategy*) と呼ぶ. さらに確率積分過程 $H \cdot \mathbb{S}^K$ がある正定数 λ により $H \cdot \mathbb{S}^K \geq -\lambda$ となるとき, 投資戦略 H は λ-*admissible* であるという. $\mathbb{S}^K$ における λ-*admissible* な投資戦略全体の集合を $\mathcal{H}^K_\lambda$ と表し, $\mathcal{H}^{small}_\lambda = \bigcup_K \mathcal{H}^K_\lambda$ と定義する.

投資戦略 H は各資産の各時刻における保有量を表し, 確率積分 $H \cdot \mathbb{S}^K$ は戦略 H に対応する累積 (割引) 損益額を表す. また admissibility 条件は累積損失額が非有界となるような「非合法的な」戦略を排除することに対応しており, 無裁定理論と関連するマルチンゲール理論において本質的な役割を持つ. λ は損失額のボーダーライン (credit line) とみなすことができる. 詳細は参考文献 [1] を参照されたい.

上で定義した $\mathcal{H}^{small}_\lambda$ は, 全期間においてある有限個の証券のみを取引する投資戦略のクラスであることに注意する. large financial market では取引可能な資産が無限個存在するため, 各時刻 $t \in [0,T]$, および各 $\omega \in \Omega$ によって保有する資産の集合が異なるような投資戦略のクラスを考えるべきである. ここでは De.Donno-Pratelli[2] により導入された, 無限次元セミマルチンゲールに関する generalized stochastic integral による定義を採用する.

定義 2. 各 H^n をある *small market* $\mathbb{S}^{K_n}$ における投資戦略とする. $\mathbb{H} = (H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が [2] の意味で $\mathbb{S}$-*integrable* ($\mathbb{H} \in L(\mathbb{S})$ と書く) である, すなわち確率積分過程の列 $(H^n \cdot \mathbb{S}^{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ がセミマルチンゲール位相で *Cauchy* 列となるとき, $\mathbb{H} = (H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を一般化投資戦略 (*generalized strategy*) と呼ぶ. またその極限セミマルチンゲールを $\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}$ と書き, $\mathbb{H}$ の $\mathbb{S}$ に関する一般化確率積分 (*generalized stochastic integral*) と呼ぶ. さらに近似列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が一様に λ-*admissible* であるとき, $\mathbb{H}$ は λ-*admissible* であるという. λ-*admissible* な一般化投資戦略全体の集合を $\mathcal{H}^{large}_\lambda$ と書く.

裁定機会とは, 直観的には「無リスクで正の富を得るような投資戦略」のことを指す. このような理想的な戦略が存在すれば, 多くの (理性的な) 投資家がこの戦略を取ることによ

*hamaguchi@math.kyoto-u.ac.jp

り, 需要と供給の関係から価格が変動, その結果裁定機会は直ちに消失するであろう. したがって数理ファイナンスにおける標準的なマーケットモデルは裁定機会が存在しないことが要請される. large financial market では様々な裁定機会の概念が存在するが, 本講演では次の主要な 4 つの裁定機会について議論する.

定義 3. (*i*) *small market* $\mathbb{S}^K$ における 1-*admissible strategy* $H \in \mathcal{H}_1^K$ が

$$(H \cdot \mathbb{S}^K)_T \geq 0 \ a.s. \text{ かつ } \mathbb{P}\{(H \cdot \mathbb{S}^K)_T > 0\} > 0$$

を満たすとき, H を $\mathbb{S}^K$ における裁定機会 *(arbitrage in a small market)* と呼ぶ.

(*ii*) 1-*admissible generalized strategy* $\mathbb{H} \in \mathcal{H}_1^{large}$ が

$$(\mathbb{H} \cdot \mathbb{S})_T \geq 0 \ a.s. \text{ かつ } \mathbb{P}\{(\mathbb{H} \cdot \mathbb{S})_T > 0\} > 0$$

を満たすとき, $\mathbb{H}$ を一般化裁定機会 *(generalized arbitrage, (GA))* と呼ぶ.

(*iii*) *small market* における投資戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の *2* 条件を満たすとき, $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を第一種近似裁定機会 *(asymptotic arbitrage of the first kind, (AA1))* と呼ぶ;

(*iii-a*) ある定数の列 $\epsilon_n \downarrow 0$ が存在し, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $H^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{small}$ となる;

(*iii-b*) ある定数の列 $c_n \uparrow \infty$ および正定数 α が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S}^{K_n})_T \geq c_n\} \geq \alpha > 0$$

が成立する.

(*iv*) *small market* における投資戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の *2* 条件を満たすとき, $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を第二種近似裁定機会 *(asymptotic arbitrage of the second kind, (AA2))* と呼ぶ;

(*iv-a*) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $H^n \in \mathcal{H}_1^{small}$ となる;

(*iv-b*) ある定数 $c > 0$ が存在し,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S}^{K_n})_T \geq c\} = 1$$

が成立する.

上のような裁定機会が存在しないとき, large financial market $\mathbb{S}$ はそれぞれ無裁定型条件 $(NA)_{small}$, (NGA), $(NAA1)$, $(NAA2)$ を満たすという.

large financial market $\mathbb{X} = ((S^n)_{n\in\mathbb{N}}, 1, V)$ を考える. ここで V は $S^0 \equiv 1$ に代わる新しい基準財の S^0 による割引価格を表し, 正値セミマルチンゲールであるとする. 基準財を S^0 から V に変更すると, 各危険資産および安全資産の V による割引価格はそれぞれ $\frac{S^n}{V}$ および $\frac{1}{V}$ となる. したがって新しい large financial market $\mathbb{Z} = ((\frac{S^n}{V})_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{V}, 1)$ を考えることとなる. 本講演では, 新しいマーケット $\mathbb{Z}$ における無裁定型条件を元のマーケット $\mathbb{X}$ に関する条件として記述し, さらに基準財変更によって無裁定型条件が保存するための条件について説明する.

参考文献

[1] Delbaen-Schachermayer; The Mathematics of Arbitrage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006).

[2] De.Donno-Pratelli; Stochastic integration with respect to a sequence of semimartingales. In memoriam Paul-Andr Meyer: Sminaire de Probabilits XXXIX, 119135, Lecture Notes in Math., 1874, Springer, Berlin, (2006).

非整数ボラティリティに対する統計的推測

阪大・基礎工　高畠　哲也
(共同研究者　阪大・基礎工　深澤　正彰)

1　講演の概要

本講演では、数理ファイナンスの分野で近年注目を集めている、非整数ボラティリティモデルと呼ばれる、株価過程のモデルに対する未知定数の推定問題を考察する。 今、対数株価過程 $X = \log(S)$ は、実測度のもとで、以下の確率過程に従うと仮定する。

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sqrt{\exp(V_s)}\, dB_s,$$
$$V_t = V_0 + \int_0^t a_s\, ds + \eta W_t^H, \ \ (H, \eta) \in (0,1) \times (0, \infty).$$

ただし、B は標準 Brown 運動、W^H は Hurst 指数 H の非整数 Brown 運動である。ここで、対数ボラティリティ過程 V に含まれる H と η が我々が推定したい未知の定数であり、これらを有限期間で観測される高頻度株価取引データから推定することが、本研究の目的である。

2　問題設定と主結果

2.1　問題設定

本研究では、以下のデータ $\mathbf{Y}_\ell = (Y_0^\ell, Y_1^\ell, \cdots, Y_n^\ell)$ が観測される状況を考える。

$$Y_j^\ell = \log\left[\frac{1}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n} \exp(V_s)\, ds\right] + \sqrt{\frac{2}{m}}\zeta_j, \ \ j \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}, \ \ \ell = (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2. \tag{1}$$

ここで、δ_n はデータの観測間隔で、$\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は独立同分布な標準正規ノイズを表す。この観測モデルは、セミマルチンゲールの二次変動に関する安定収束定理と Delta 法から導出される。もしノイズ $\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ の影響がなければ、観測 $\mathbf{Y}_\ell$ は観測間隔 δ_n 毎の対数株価過程 X の二次変動を δ_n で割り、さらに対数変換を施したものに等しい。また、観測間隔 δ_n が十分小さければ、Taylor 近似と Euler-Maruyama 近似により、

$$\Delta Y_j^\ell \approx \frac{1}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n} (V_s - V_{s-\delta_n})\, ds + \sqrt{\frac{2}{m}}\Delta\zeta_j \quad \approx \frac{\eta}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n} (W_s^H - W_{s-\delta_n}^H)\, ds + \sqrt{\frac{2}{m}}\Delta\zeta_j$$

と近似される。ただし、Δ は時系列の差分をとる作用を表す。本講演では、上記近似を利用し、観測データの差分を近似的に定常 Gauss な時系列とみなした際の近似尤度を用いて、推定量を構成する。

2.2　推定量の構成

以下、$P_\theta^{(\ell)}$ で観測 $\mathbf{Y}_\ell$ の分布を表すこととする。まず、観測値 $\mathbf{y}_n \equiv (y_1, \cdots, y_n) := \mathbf{Y}_\ell(\omega) \in \mathbb{R}^n$ に基づき、$(H, \nu) \equiv (H, \eta\delta_n^H)$ の推定量 $(\widehat{H}_\ell, \widehat{\nu}_\ell)$ を、以下の Whittle 型推定関数

$$U_{\ell,0}(H,\nu) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log g_{H,\nu}^m(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{4\pi n}\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{-1}(i-j)\lambda}\frac{1}{g_{H,\nu}^m(\lambda)}\, d\lambda\right)\Delta y_i \Delta y_j$$

を (H,ν) に関して最小化するものとして定義する。ただし、

$$g_{H,\nu}^m(\lambda) = \nu^2 f_H(\lambda) + \frac{2}{m} l(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

ここで、f_H は定常 Gauss 過程 $\{\frac{1}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n}(W_s^H - W_{s-\delta_n}^H)\,ds\}_{j\in\mathbb{Z}}$、$l$ は $\{\Delta\zeta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ のスペクトル密度をそれぞれ表す。このとき、未知定数 $\theta = (H,\eta)$ に対する推定量 $\widehat{\theta}_\ell$ を、以下で定義する。

$$\widehat{\theta}_\ell = \left(\widehat{H}_\ell, \delta_n^{-\widehat{H}_\ell}\widehat{\nu}_\ell\right), \quad \ell \in \mathbb{Z}_+^2.$$

本講演では、推定量 $\widehat{\theta}_\ell$ に関して得られた、以下の結果を紹介する。

定理 1. $\Theta = [H_-, H_+] \times [\eta_-, \eta_+] \subset (0,1) \times (0,\infty)$ とし、以下の条件を仮定する。

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} n\delta_n \le \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} n\delta_n < \infty, \quad \delta_n \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$
$$\inf_{H\in[H_-,H_+]} m\delta_n^{2H} = m\delta_n^{2H_+} \to \infty \text{ as } n, m \to \infty.$$

このとき、推定量の列 $\{\widehat{\theta}_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}_+^2}$ は未知定数 $\theta = (H,\eta)$ に対して弱一致性を満たす。すなわち、すべての $\theta_0 = (H_0,\eta_0) \in \mathring{\Theta}$ に対し、以下の確率収束が成り立つ：

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し、} \quad \lim_{n,m\to\infty} P_{\theta_0}^{(\ell)}\left[\left\|\widehat{\theta}_\ell - \theta_0\right\| \ge \varepsilon\right] = 0.$$

参考文献

[1] Bayer, C., Friz, P. and Gatheral, J. (2016): Pricing under rough volatility, Quantitative Finance, Vol. 16, Issue 6, p.887-904.

[2] Comte, F. and Renault, E. (1998): Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models, Mathematical Finance, Vol. 8, No. 4, pp. 291-323.

[3] Fukasawa, M. (2011): Asymptotic analysis for stochastic volatility: martingale expansion, Finance and Stochastics, Vol. 15, pp. 635-654.

[4] Fukasawa, M. (2016): Short-time at-the-money skew and rough fractional volatility, Quantitative Finance, Vol. 17, Issue 2, pp. 189-198.

[5] Gatheral, J., Jaisson, T. and Rosenbaum, M. (2014): Volatility is rough, arXiv:1410.3394.

EXPECTED EXPONENTIAL UTILITY MAXIMIZATION OF INSURERS WITH A GENERAL DIFFUSION FACTOR MODEL : THE COMPLETE MARKET CASE.

畑　宏明 (静岡大学)、許　順吉、孫　立憲 (國立中央大學 (台湾))

【本講演の目的】完備市場の場合の一般的な非線形確率ファクターモデル下での指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題の最適戦略と最適値を求める。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ をフィルター付き確率空間とする。ただし、$\mathcal{F}_t := \sigma\{W_s, p_s, Z_j \mathbf{1}_{j\leq p_s}; s \leq t, j \geq 1\}$ である。ここで、$(W_t)_{t\geq 0}$ は $n+m$ 次元標準ブラウン運動, $(p_t)_{t\geq 0}$ は強度 $\lambda > 0$ をもつ Poisson 過程 , $(Z_i)_{i\geq 1}$ は同一分布 ν をもつ独立な非負確率変数の列。また、$(W_t)_{t\geq 0}, (p_t)_{t\geq 0}, (Z_i)_{i\geq 1}$ は互いに独立とする。

今、次の市場モデルを考える。

- 銀行預金過程 : $dS_t^0 = S_t^0 r(Y_t)dt, \quad S_0^0 = s_0^0,$
- $i(i = 1, \cdots, m)$ 番目の危険資産価格過程 :

$$dS_t^i = S_t^i \left\{ \mu^i(Y_t)dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_p^{ik}(Y_t)dW_t^k \right\}, \quad S_0^i = s_0^i,$$

- ファクター過程 : $dY_t = g(Y_t)dt + \sigma_f(Y_t)dW_t, \quad Y(0) = y \in \mathbb{R}^n.$

ここで、 σ_p は $m \times m$-値行列関数, σ_f は $n \times m$-値行列関数、 r は $\mathbb{R}$-値関数, μ は $\mathbb{R}^m$-値関数, g は $\mathbb{R}^n$-関数である。

更に、リスク過程として、次の Cramér-Lundberg モデルを用いる :

$$R_t := x + ct - J_t,$$

ここで、 x は初期資産、 $c > 0$ は収入保険料率、$J_t := \sum_{i=1}^{p_t} Z_i$ である。 また、$\Delta J_s := J_s - J_{s-}$ と定義するとき、$J.$ に関連する Poisson ランダム測度は $t \geq 0$ とボレル集合 $U \subset [0, \infty)$ に対して、次のように定義する :

$$N([0,t] \times U) := \sum_{0 \leq s \leq t} 1_U(\Delta J_s).$$

このとき、次の条件を仮定する。

(A1) $r, \mu, g, \sigma_p, \sigma_f$ は大域的に Lipschitz 条件を満たす。
(A2) $\sigma_p(x)$ は正則行列である。
(A3) $x, \eta \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つような $\mu_1, \mu_2 > 0$ が存在する :

$$\mu_1|\eta|^2 \leq \eta^* \sigma_f(x)\sigma_f(x)^* \eta \leq \mu_2|\eta|^2.$$

(A4) r は非負で有界.

π_t^i を i 番目の危険資産の株の保有量, $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^*$ とすると、時刻 t における保険会社の資産過程 X_t^π は次を満たす。

$$\begin{aligned}
X_t^\pi &= R_t + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^m \pi_u^i \frac{dS_u^i}{S_u^i} + (X_u^\pi - \pi_u^* \mathbf{1}) \frac{dS_u^0}{S_u^0} \right\} \\
&= x + \int_0^t \{c + \pi_u^*(\mu(Y_u) - r(Y_u)\mathbf{1}) + r(Y_u)X_u^\pi\} \, du + \int_0^t \pi_u^* \sigma_p(Y_u) dW_u - \sum_{i=1}^{p_t} Z_i.
\end{aligned}$$

本講演では、次の指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題を扱う。

(P) $$V(t,x,y) := \sup_{\pi\in\mathcal{A}_{t,T}} E\left[-\mathrm{e}^{-\alpha X_T^{t,x,y,\pi}}\right].$$

ただし、$\mathcal{A}_{t,T}$ は許容な投資戦略全体。

【解法の手順】

(1) 動的計画原理を用いて、形式的に下で与えた Hamilton−Jacobi−Bellman(HJB) 方程式 (0.1) を導出する。(※ HJB 方程式 (0.1) の $\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}[\quad]$ において、sup を達成する $\tilde{\pi}$ は最適投資戦略の候補になる。)

(2) HJB 方程式 (0.1) に最適戦略の候補 $\tilde{\pi}$ を代入した方程式の解の存在を証明する。

(3) HJB 方程式 (0.1) を用いて、Verification Theorem (最適戦略の候補 $\tilde{\pi}$ が本当に最適戦略であることを保証する定理) を証明する。

実際、動的計画原理から、問題 (P) に関連する HJB 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\pi^*\sigma_p(y)\sigma_p(y)^*\pi V_{xx}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*V_{yy})\right.\\
&\qquad+\pi^*\sigma_p(y)\sigma_f(y)^*V_{xy}+\{c+\pi^*(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})+r(y)x\}V_x+g(y)^*V_y\\
&\qquad\left.+\lambda\int_{z>0}\{V(t,x-z,y)-V(t,x,y)\}\nu(dz)\right]=0,\\
&V(T,x,y)=U(x).
\end{aligned}\tag{0.1}$$

このとき、

$$\tilde{V}(t,x,y) := -\mathrm{e}^{-a(t,y)x-b(t,y)},$$

は (0.1) の解になる。ただし、a と b は次を満たす：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*D^2a)+(Da)^*\left\{g(y)-\sigma_f(y)\sigma_p(y)^{-1}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{a}(Da)^*\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*Da+r(y)a=0,\quad a(T,y)=\alpha,\\
&\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*D^2b)+(Db)^*\left\{g(y)-\sigma_f(y)\sigma_p(y)^{-1}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})\right.\\
&\qquad\left.-\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*\frac{Da}{a}\right\}+\frac{1}{2}\left(\mu(y)-r(y)\mathbf{1}-\sigma_p(y)\sigma_f(y)^*\frac{Da}{a}\right)^*\\
&\qquad\cdot(\sigma_p(y)\sigma_p(y)^*)^{-1}\left(\mu(y)-r(y)\mathbf{1}-\sigma_p(y)\sigma_f(y)^*\frac{Da}{a}\right)+ca\\
&\qquad-\lambda\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{a(s,y)z}-1\right)\nu(dz)=0,\quad b(T,y)=0.
\end{aligned}$$

最終的に次の定理が得られる。

Theorem 0.1. **(A1)** ∼ **(A4)** を仮定する。 さらに、次も仮定する。

(A5) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{C_0z}\nu(dz)<\infty \quad \exists C_0>0.$

このとき、

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_t := \tilde{\pi}(t,X_t^{\tilde{\pi}},Y_t) =&(\sigma_p(Y_t)\sigma_p(Y_t)^*)^{-1}\left[\sigma_p(Y_t)\sigma_f(Y_t)^*\frac{Da(t,Y_t)}{a(t,Y_t)}\left(-X_t^{\tilde{\pi}}+\frac{1}{a(t,Y_t)}\right)\right.\\
&\left.+\frac{\mu(Y_t)-r(Y_t)\mathbf{1}-\sigma_p(Y_t)\sigma_f(Y_t)^*Db(t,Y_t)}{a(t,Y_t)}\right]
\end{aligned}$$

は最適戦略で、$V(0,x,y)=\tilde{V}(0,x,y)$ が成り立つ。

参考文献

[1] H. Hata, S.J. Sheu and L.H. Sun (2017) “Expected exponential utility maximization of insurers with a general diffusion factor model : The complete market case.”, preprint.

SECOND ORDER UNBIASED SIMULATION METHOD FOR REFLECTED STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

TATSUKI AKIYAMA, ARTURO KOHATSU-HIGA, AND TOMOOKI YUASA

1. Introduction

次の初期値 $X_0 = x \in [0,\infty)$ である 1 次元反射壁確率微分方程式を考える．

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}L_t, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

ただし，$(W_t)_{t\geq 0}$ は初期値 $W_0 = 0$ である 1 次元 Wiener 過程であり，拡散係数 $\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は $\sigma \in C_b^2([0,\infty))$ を満たし，一様楕円性を持つとする．この時，次を満たす確率過程 $(X_t(x), L_t(x))_{t\geq 0}$ が存在する．

- $(X_t(x), L_t(x))_{t\geq 0}$ は次を満たす初期値 $(X_0(x), L_0(x)) = (x, 0)$ である非負連続適合過程である．
$$X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(X_s(x))\mathrm{d}W_s + L_t(x), \quad t \geq 0.$$
- $L_\bullet(x) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は非減少関数であり，次を満たす．
$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s(x)>0\}}\mathrm{d}L_s(x) = 0, \quad t \geq 0.$$

特に，$(X_t(x), L_t(x))_{t\geq 0}$ を (1.1) の解と呼び，$(L_t(x))_{t\geq 0}$ は $(X_t(x))_{t\geq 0}$ の 0 点での Local time となる．

我々の目的は任意の $T > 0$ に対して，ある数値計算可能な Markov 過程 $(\bar{X}_t^\pi(x))_{t\geq 0}$ を用いて，次を満たす数値計算可能な確率変数 $Z_T(x)$ を構成することである．任意の $f \in L_\infty([0,\infty))$ に対して，

$$\mathbb{E}\left[f(X_T(x))\right] = \mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T^\pi(x))Z_T(x)\right]. \tag{1.2}$$

この時，(1.2) の右辺に対して，直接 Monte Carlo method を用いることで，左辺の近似値を求めることが可能である．このような数値計算手法を Unbiased simulation method と呼ぶ．特に，Monte Carlo method の誤差は $Z_T(x)$ の分散に依存する為，数値計算の意味で精度の高い $Z_T(x)$ を構成することに意味を持つ．

2. First order Unbiased simulation method for RSDEs with Poisson kernel method

任意の $x \in [0,\infty)$，$t > 0$ に対して，次の密度関数 $y \mapsto \bar{p}_t(x,y)$ を持つ確率変数を $\bar{X}_t(x)$ とする．

$$\bar{p}_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2(x)}}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t\sigma^2(x)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2(x)}}\exp\left\{-\frac{|y+x|^2}{2t\sigma^2(x)}\right\}, \quad y \in [0,\infty).$$

この時，初期値 $\bar{X}_0(x) = x$ とする Markov 過程 $(\bar{X}_t(x))_{t\geq 0}$ は $(X_t(x))_{t\geq 0}$ の近似過程である．実際，$(\bar{X}_t(x))_{t\geq 0}$ は Order $T^{1/2}$ の近似過程であり（see (2.1) with $\mu = 0$），この近似過程を用いることで，(1.2) を満たす確率変数 $Z_T(x)$ を構成することが可能である．

Theorem 2.0.1. 任意の $x \in [0,\infty)$，$T > 0$，$f \in L_\infty([0,\infty))$，$\lambda > 0$，$\mu \geq 0$ に対して，次を満たす．

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu T^{1/2}}f(X_T(x))\right] - \mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\mu s^{1/2}}\mathbb{E}\left[f(X_s(\bullet))\right]|_{\bullet=\bar{X}_{T-s}(x)Y}\theta_{T-s}^T(x,\bar{X}_{T-s}(x)Y)\mathrm{d}s\right].$$

ただし，Y は $(W_t)_{t\geq 0}$ と独立な *Bernoulli* 分布に従う確率変数であり，任意の $x,z \in [0,\infty)$，$0 < t \leq r \leq T$ に対して，確率変数 $\theta_t^r(x,zY)$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}\theta_t^r(x,zY) = {} & \mathbb{P}(Y=1)^{-1}\left(2^{-1}\mu(r-t)^{-1/2}\bar{p}_t(x,zY) + 2^{-1}\partial_y^2(\sigma^2(y)\bar{p}_t(x,y))|_{y=zY} - \partial_t\bar{p}_t(x,zY)\right)\bar{p}_t(x,zY)^{-1}Y \\ & + \mathbb{P}(Y=0)^{-1}\,2^{-1}\partial_y(\sigma^2(y)\bar{p}_t(x,y))|_{y=0}(1-Y).\end{aligned}$$

Department of Mathematical Sciences Ritsumeikan University 1-1-1 Nojihigashi, Kusatsu, Shiga, 525-8577, Japan.

特に，ある定数 $C > 0$ が存在して，次を満たす．

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left|\mathbb{E}\left[e^{\mu T^{1/2}}f(X_T(x))\right]-\mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\right]\right|\le Ce^{\mu T^{1/2}}T^{1/2}. \tag{2.1}$$

さらに，次で与えられる $Z_T(x)\in L_1(\Omega)$ は (1.2) を満たす．

$$Z_T(x)=\mathbf{1}_{\{N_T=0\}}+\mathbf{1}_{\{N_T>0\}}e^{\lambda T-\mu T^{1/2}}\prod_{i=0}^{N_T-1}\lambda^{-1}\theta^{T-\tau_i}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(\bar{X}^\pi_{\tau_i}(x)Y_i,\bar{X}^\pi_{\tau_{i+1}}(x)Y_{i+1}).$$

ただし，$(N_t)_{t\ge0}$ は初期時刻 $\tau_0\equiv0$ の点過程 $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ から生成される変数 λ を持つ *Poisson* 過程であり，$(\bar{X}^\pi_t(x))_{t\ge0}$ は $\mathbb{P}(\bar{X}^\pi_t(x)\in dz|\bar{X}^\pi_s(x)=y)=\bar{p}_{t-s}(y,z)dz$ を満たす *Markov* 過程である．また，$Y_0\equiv1$ であり，$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は Y と同分布な独立確率変数列である．さらに，$(W_t)_{t\ge0}$，$(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$，$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は全て独立とする．

3. Second order Unbiased simulation method for RSDEs with Poisson kernel method

Local time が付随しない場合，Theorem 2.0.1 で与えられる確率変数 $Z_T(x)$ の分散は有限になるとは限らない（Lemma 5.4 in [2]）．ただし，点過程を取り替えることで，$Z_T(x)$ の全ての Moment を有限にすることが可能である（Section 7 in [2]）．さらに，(2.1) の Order を改善することで，点過程を取り替えずに（Poisson 過程の状態で）$Z_T(x)$ の全ての Moment を有限にすることが可能である（Theorem 3.3.3 in [3]）．また，Poisson kernel method（e.g.[4]）を適用することで，“Efficiency”が改善される（Section 4.3 in [3]）．

そこで，(2.1) の Order を改善し，$Z_T(x)$ の再構成を行う．実際，任意の $x,z\in[0,\infty)$，$t>0$ に対して，

$$\bar{\eta}_t(x,z):=\int_0^t\left(\sigma'(x)\int_0^\infty\left(\bar{p}^x_s(y,z)\partial_y\bar{p}_{t-s}(x,y)-(y-x)\bar{p}^x_s(y,z)\partial^2_y\bar{p}_{t-s}(x,y)\right)\mathrm{d}y+2\sigma'(0)\bar{p}_s(0,z)g_{(t-s)\sigma^2(x)}(x)\right)\mathrm{d}s$$

とすると，$\bar{\eta}_t(x,z)\bar{p}_t(x,z)^{-1}$（called extra term in Remark 3.1 of [3]）は Order $e^{\mu T}T$ の展開を導く．ただし，$g_{t\sigma^2(x)}(z)=(2\pi t\sigma^2(x))^{-1/2}\exp\{-\frac{z^2}{2t\sigma^2(x)}\}$ であり，$\bar{p}^x_t(y,z)=g_{t\sigma^2(x)}(z-y)+g_{t\sigma^2(x)}(z+y)$ である．

Theorem 3.0.1. 任意の $x\in[0,\infty)$，$T>0$，$f\in L_\infty([0,\infty))$，$\lambda>0$，$\mu\ge0$ に対して，次を満たす．

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu T}f(X_T(x))\right]-\mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\left(1+\frac{\bar{\eta}_T(x,\bar{X}_T(x))}{\bar{p}_T(x,\bar{X}_T(x))}\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\mu s}\mathbb{E}\left[f(X_s(\bullet))\right]|_{\bullet=\bar{X}_{T-s}(x)Y}\theta_{T-s}(x,\bar{X}_{T-s}(x)Y)\mathrm{d}s\right].$$

任意の $x,z\in[0,\infty)$，$0<t\le T$ に対して，確率変数 $\theta_t(x,zY)$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}\theta_t(x,zY)=&\ \mathbb{P}(Y=1)^{-1}\left(\mu\bar{q}_t(x,zY)+2^{-1}\partial^2_y(\sigma^2(y)\bar{q}_t(x,y))|_{y=zY}-\partial_t\bar{q}_t(x,zY)\right)\bar{p}_t(x,zY)^{-1}Y\\&+\mathbb{P}(Y=0)^{-1}\,2^{-1}\partial_y(\sigma^2(y)\bar{q}_t(x,y))|_{y=0}(1-Y).\end{aligned}$$

ただし，$\bar{q}_t(x,y)=\bar{p}_t(x,y)+\bar{\eta}_t(x,y)$ である．特に，ある定数 $C>0$ が存在して，次を満たす．

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left|\mathbb{E}\left[e^{\mu T}f(X_T(x))\right]-\mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\left(1+\frac{\bar{\eta}_T(x,\bar{X}_T(x))}{\bar{p}_T(x,\bar{X}_T(x))}\right)\right]\right|\le Ce^{\mu T}T.$$

さらに，次で与えられる $Z_T(x)\in\cap_{p>0}L_p(\Omega)$ は (1.2) を満たす．

$$Z_T(x)=\mathbf{1}_{\{N_T=0\}}+\mathbf{1}_{\{N_T>0\}}e^{(\lambda-\mu)T}\left(1+\frac{\bar{\eta}_{T-\tau_{N_T}}(\bar{X}^\pi_{\tau_{N_T}}(x)Y_{N_T},\bar{X}^\pi_T(x))}{\bar{p}_{T-\tau_{N_T}}(\bar{X}^\pi_{\tau_{N_T}}(x)Y_{N_T},\bar{X}^\pi_T(x))}\right)\prod_{i=0}^{N_T-1}\lambda^{-1}\theta_{\tau_{i+1}-\tau_i}(\bar{X}^\pi_{\tau_i}(x)Y_i,\bar{X}^\pi_{\tau_{i+1}}(x)Y_{i+1}).$$

ただし，Y，$(N_t)_{t\ge0}$，$(\bar{X}^\pi_t(x))_{t\in\pi}$，$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は *Theorem 2.0.1* と同一である．

References

[1] A. Alfonsi, M. Hayashi and A. Kohatsu-Higa. Parametrix methods for one dimensional SDEs with reflecting boundary conditions. Preprint.

[2] P. Andersson and A. Kohatsu-Higa. Unbiased simulation of stochastic differential equations using parametrix expansions. *Bernoulli*, 23(3):2028-2057, 2017.

[3] P. Andersson, A. Kohatsu-Higa and T. Yuasa. Second order probabilistic parametrix method for unbiased simulation of stochastic differential equations. Preprint.

[4] N. Chen and Z. Huang. Brownian measures, importance sampling and unbiased simulation of diffusion extremes. *Oper. Res. Lett.*, 40(6):554-563, 2012.

Asymptotic behavior of lifetime sums of random simplicial complex processes

金澤 秀 *
(日野正訓氏 (京都大学) との共同研究)

1 序

$K_n = V_n \sqcup E_n$ を頂点数 n の完全グラフとする．ここで, V_n と E_n はそれぞれ頂点集合と辺集合である．各辺 $e \in E_n$ が独立に確率 p $(0 \le p \le 1)$ で含まれる K_n のランダム部分グラフを Erdős–Rényi グラフという．後に, p を区間 $[0,1]$ 上で動かして Erdős–Rényi グラフの族を考察するため, 次のような構成を行う．K_n の各辺 $e \in E_n$ に対して, 区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数 u_e を独立にのせ, p $(0 \le p \le 1)$ に対して, K_n のランダム部分グラフ $K_n(p)$ を

$$K_n(p) := V_n \sqcup \{e \in E_n \mid u_e \le p\}$$

で定義する．これにより得られる Erdős–Rényi グラフの増大族 $\mathcal{K}_n := \{K_n(t)\}_{0 \le t \le 1}$ は, V_n 上の Erdős–Rényi グラフ過程と呼ばれ, 重み付き完全グラフ $(K_n, \{u_e\}_{e \in E_n})$ における全域木の重みの最小値を調べた Frieze の定理 [3] において重要な役割を果たす.

本稿では, ランダムグラフ過程の高次元版であるランダム複体過程について論じ, Frieze の定理の高次元への一般化とみなせる結果を紹介する．特に, 平岡–白井 [4] により提起されたいくつかの問題に対する解を与える (定理 3.2, 定理 3.1)．議論の主要部の一つは, コホモロジー消滅定理 [1] を Betti 数の定量評価という定式化に基づいて一般化することである．本講演は, 日野正訓氏 (京都大学) との共同研究に基づく.

2 ランダム複体過程

ランダム単体複体はランダムグラフの自然な高次元化として近年盛んに研究されている．典型的なランダム単体複体として Linial–Meshulam 複体とランダムクリーク複体を紹介する．$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とする．任意の $0 \le k \le n$ に対して, $[n]$ の k 点集合の全体を $\binom{[n]}{k}$ と表記する．$d \ge 1$ として, 各 $\sigma \in \binom{[n]}{d+1}$ に対して, 区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数 u_σ を独立にのせる．d-Linial–Meshulam 複体過程 $\mathcal{K}_n^{(d)} := \{K_n^{(d)}(t)\}_{0 \le t \le 1}$ は,

$$K_n^{(d)}(t) := \bigsqcup_{k=1}^{d} \binom{[n]}{k} \sqcup \left\{ \sigma \in \binom{[n]}{d+1} \,\middle|\, u_\sigma \le t \right\} \quad (0 \le t \le 1)$$

で定義される．また一般に, 与えられたグラフ $G = V \sqcup E$ に対して, G をクリーク化した単体複体 $\mathrm{Cl}(G)$ とは, 1 次元スケルトンが G と一致するような単体複体の中で包含関係に関して最大なものをいう．ランダムクリーク複体過程 $\mathcal{C}_n := \{C_n(t)\}_{0 \le t \le 1}$ は, $C_n(t) = \mathrm{Cl}(K_n(t))$ で定義される.

*東北大学大学院理学研究科 E-mail: kanazawa.shu.p5@dc.tohoku.ac.jp

平岡–白井 [4] は, パーシステントホモロジーの枠組みで, Frieze の定理の高次元への類似を研究した．パーシステントホモロジーは, フィルトレーションと呼ばれる単体複体の増大族に対して, その位相的な特徴がどのように変化するかを記述することができる [2, 5]．特に, フィルトレーションにおいてそれぞれの次元の "穴" (間隙, 輪, 空洞など) の発生時刻と消滅時刻という量が定まる．そして, フィルトレーションにおける k 次元の "穴" に対して, k-次生存時間は発生時刻と消滅時刻の差により定義される．論文 [4] では, フィルトレーション $\mathbb{X} = \{X(t)\}_{0\le t\le 1}$ における k-次生存時間の総和 $L_k(\mathbb{X})$ が次のような積分表示をもつことが示された:

$$L_k(\mathbb{X}) = \int_0^1 \beta_k(X(t))\, dt.$$

ここで, $\beta_k(X(t))$ は $X(t)$ の k-次 (簡約)Betti 数を表す．Frieze の定理は, Erdős–Rényi グラフ過程 $\mathcal{K}_n$ の 0-次生存時間和 $L_0(\mathcal{K}_n)$ の頂点数 n に対する漸近挙動に関する結果とみなせるため, d-Linial–Meshulam 複体過程 $\mathcal{K}_n^{(d)}$ とランダムクリーク複体過程 $\mathcal{C}_n$ の高次の生存時間和の頂点数 n に対する漸近挙動を調べることは自然な問題である．

3 主結果

定理 3.1. $k \ge 0$ とする．このとき, ある正定数 c と C が存在して, 十分大きな n に対して,

$$c\, n^{k/2+1-1/(k+1)} \le \mathbb{E}[L_k(\mathcal{C}_n)] \le C\, n^{k/2+1-1/(k+1)}.$$

定理 3.2. $d \ge 1$ とする．このとき, ある正定数 I_{d-1} が存在して, 任意の $r \in [1, \infty)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{L_{d-1}(\mathcal{K}_n^{(d)})}{n^{d-1}} - I_{d-1}\right|^r\right] = 0. \tag{3.1}$$

定理 3.1 は, 論文 [4] で得られていた次の評価の上からのオーダー評価を改良したものである:

$$c\, n^{k/2+1-1/(k+1)} \le \mathbb{E}[L_k(\mathcal{C}_n)] \le \begin{cases} C\, n^k \log n & (k = 0, 1), \\ C\, n^k & (k \ge 2). \end{cases}$$

また, 論文 [4] では $\mathbb{E}\left[L_{d-1}(\mathcal{K}_n^{(d)})\right] / n^{d-1}$ の上極限と下極限が区間 $(0, \infty)$ にあることが示されていたが, 極限値の存在に関しては形式的な議論より予想されていたのみであった．式 (3.1) から, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[L_{d-1}(\mathcal{K}_n^{(d)})\right] / n^{d-1} = I_{d-1}$ が従う．I_{d-1} は具体的な積分表示を持つ数である．

参考文献

[1] W. Ballmann and J. Świątkowski, On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 615–645.

[2] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian, Topological persistence and simplification, Discrete Comput. Geom. **28** (2002), 511–533.

[3] A. M. Frieze, On the value of a random minimum spanning tree problem, Discrete Applied Math. **10** (1985), 47–56.

[4] Y. Hiraoka and T. Shirai, Minimum spanning acycle and lifetime of persistent homology in the Linial–Mehsulam process, Random Structures & Algorithms **51** (2017), 183–371.

[5] A. Zomorodian and G. Carlsson, Computing persistent homology, Discrete Comput. Geom. **33** (2005), 249–274.

Jump processes on the boundaries of random trees

得重雄毅

2017 年 11 月 20 日

無限ツリー T とその上の遷移的な RW$\{Z_n\}_{n\geq 0}$ を考える．T 上の遷移的な RW は最終的に T のマルティン境界 M に到達する．木上氏による先行研究において、ある仮定の下でこの T 上の RW から M 上の飛躍型マルコフ過程が構成できることが示され、また調和測度の volume doubling property という仮定の下で対応する熱核評価などの結果が得られている．本講演では T として、優臨界ゴルトン-ワトソンツリーを取り、またその上の RW として λ-*biased RW* と呼ばれるものを考えた時に対応する確率過程または熱核に対してどの様な結果が得られるかについて説明する．

証明において、Lyons-Pemantle-Peres らによる、ツリーのなす空間の力学系に対するエルゴード理論 [3, 4] や、最近プレプリントとして発表された S.Lin によるこの力学系の不変分布に関する具体的表示式 [2] が重要な評価を与えるため、それらについても説明する．

参考文献

[1] Kigami, J.: *Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees*, Adv. in Math. 225, (2010), 2674-2730.

[2] Lin, S.: *Harmonic measure for biased random walk in a supercritical Galton-Watson tree*, Arxiv:1707.01811.

[3] Lyons, R., Pemantle, R., Peres, Y.: *Ergodic theory on Galton-Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure*, Ergodic Theory Dynamical Systems, 15, (1995), 593-619.

[4] Lyons, R. Pemantle, R., Peres, Y.: *Biased random walks on Galton-Watson trees*, Probab. Theory Relat. Fields, 106, (1996), 249-264.

Regularity estimates for anisotropic nonlocal operators

by Jamil Chaker (Bielefeld University)

(Joint work with Moritz Kassmann)

In this talk we study weak solutions to nonlocal equations driven by integro-differential operators of the form

$$\mathcal{L}u(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(x)} (u(y) - u(x))\, \mu(x, \mathrm{d}y),$$

where $(\mu(x,\cdot))_{x\in\mathbb{R}^d}$ is a symmetric family of measures. Given $\mu(x, \mathrm{d}y)$ and $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ we define the corresponding bilinear forms

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))\, \mu(x, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x.$$

For given $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in (0, 2)$ consider the family of measures $(\mu_{\text{axes}}(x, \mathrm{d}y))_{x\in\mathbb{R}^d}$ defined as follows

$$\mu_{\text{axes}}(x, \mathrm{d}y) = \sum_{k=1}^{d} \left(\alpha_k (2 - \alpha_k) |x_k - y_k|^{-1-\alpha_k} \, \mathrm{d}y_k \prod_{i \neq k} \delta_{\{x_i\}}(\mathrm{d}y_i) \right), \; x \in \mathbb{R}^d$$

and the metric on $\mathbb{R}^d$

$$d(x,y) := \sup_{k\in\{1,\ldots,d\}} \left\{ |x_k - y_k|^{\alpha_k/\alpha_{\max}} \mathbb{1}_{\{|x_k-y_k|\le 1\}}(x,y) + \mathbb{1}_{\{|x_k-y_k|>1\}}(x,y) \right\},$$

where $\alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$. We denote balls in the metric d with radius $r > 0$ and center $x \in \mathbb{R}^d$ by $M_r(x)$. The family $\mu_{\text{axes}}(x, \cdot)$ plays the role of the reference family for $\mu(x, \cdot)$ in the sense that we assume the corresponding energy forms to be locally comparable.

The aim of this talk is to study weak solutions to

$$\mathcal{L}u = f \qquad \text{in } M_r(x) \tag{1}$$

for sufficiently smooth f. Under suitable assumptions on the family $\mu(x, \cdot)$ we prove an a priori Hölder estimate for weak solutions to $\mathcal{L}u = 0$ with the help of a weak Harnack inequality. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be open. To put the problem into a functional analytic framework, we define appropriate function spaces. Weak solutions are defined with the help of symmetric nonlocal bilinear forms. The space of test functions consists of all functions $u \in L^2(\Omega)$ with $u \equiv 0$ on Ω^c and

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (u(y) - u(x))^2\, \mu(x, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x < \infty.$$

This space is denoted by $H^{\mu}_{\Omega}(\mathbb{R}^d)$. Solutions are defined on the space $V^{\mu}(\Omega|\mathbb{R}^d)$, which consist of all functions $u \in L^2(\Omega)$ with

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))^2\,\mu(x,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

To obtain the weak Harnack inequality, we have to derive some functional inequalities for our bilinear forms such as a localized Sobolev-type inequality and a Poincaré inequality for functions from the space of solutions.

We obtain two main results. The first is a weak Harnack inequality for weak supersolutions to (1).

Theorem 1. *Let $f \in L^q(M_1(0))$ for some $q > \max\{2, (\alpha_1)^{-1} + \cdots + (\alpha_d)^{-1}\}$. Let $u \in V^{\mu}(M_1(0)\big|\mathbb{R}^d)$, $u \geq 0$ in $M_1(0)$ satisfy*

$$\mathcal{E}(u,\phi) \geq (f,\phi) \quad \textit{for every non-negative } \phi \in H^{\mu}_{M_1(0)}(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

Then there exists $p_0 \in (0,1)$, $c_1 > 0$, independent of u, such that

$$\inf_{M_{\frac{1}{4}}(0)} u \geq c_1\Big(\fint_{M_{\frac{1}{2}}(0)} u(x)^{p_0}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p_0} - \sup_{x \in M_{\frac{15}{16}}(0)} 2\int_{\mathbb{R}^d\setminus M_1(0)} u^-(z)\mu(x,\mathrm{d}z) - \|f\|_{L^q(M_{\frac{15}{16}}(0))}.$$

The a priori Hölder estimate for weak solutions follows from the weak Harnack inequality and a decay of oscillation for weak solutions. Using these two estimates we deduce an Hölder estimate for weak solutions, which is the second main result of this talk.

Theorem 2. *Assume $u \in V^{\mu}(M_1\big|\mathbb{R}^d)$ satisfies*

$$\mathcal{E}(u,\phi) = 0 \quad \textit{for every non-negative } \phi \in H^{\mu}_{M_1}(\mathbb{R}^d).$$

Then there are $c_1 \geq 1$ and $\delta \in (0,1)$, independent of u, such that the following Hölder estimate holds for almost every $x, y \in M_{\frac{1}{2}}$

$$|u(x)-u(y)| \leq c_1\|u\|_{\infty}|x-y|^{\delta}. \tag{3}$$

相互作用粒子系に対する勾配条件とグリーン久保公式

MAKIKO SASADA

In the diffusive hydrodynamic limit for a symmetric interacting particle system (such as the exclusion process, the zero range process, the stochastic Ginzburg-Landau model, the energy exchange model), a possibly non-linear diffusion equation is derived as the hydrodynamic equation. The bulk diffusion coefficient of the limiting equation is given by Green-Kubo formula and it can be characterized by a variational formula. In the case the system satisfies the gradient condition, the variational problem is explicitly solved and the diffusion coefficient is given from the Green-Kubo formula through a static average only. In other words, the contribution of the dynamical part of Green-Kubo formula is 0. In this talk, we consider the converse, namely if the contribution of the dynamical part of Green-Kubo formula is 0, does it imply the system satisfies the gradient condition or not. We show that if the equilibrium measure μ is product and L^2 space of its single site marginal is separable, then the converse also holds.

As an application of the result, we consider a class of stochastic models for energy transport studied by Gaspard and Gilbert in [1, 2], where the exact problem is discussed for this specific model.

References

[1] P. Gaspard and T. Gilbert, *On the derivation of Fourier's law in stochastic energy exchange systems*, J. Stat. Mech.: Theory and Experiment, (2008), p11021.

[2] P. Gaspard and T. Gilbert, *Heat transport in stochastic energy exchange models of locally confined hard spheres*, J. Stat. Mech.: Theory and Experiment, (2009), p08020.

Makiko Sasada, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan

E-mail address: sasada@ms.u-tokyo.ac.jp

拡散過程の古典力学モデル
—低エネルギー軽粒子が存在する場合について

梁　松　（筑波大学）

拡散過程のノンランダムな古典力学系による導出という問題を考える。具体的には、$\mathbf{R}^d (d \geq 2)$ において、理想気体と呼ばれる無数の軽粒子を含む環境に置かれた 1 つの重粒子が、軽粒子達と古典力学系に従って相互作用しながら動くというモデルを考える。また、粒子間相互作用はあるコンパクト台を持つポテンシャル関数 U によって与えられるとし、系のハミルトンは $\frac{1}{2}|V|^2 + \sum_{(x,v)} \frac{m}{2}|v|^2 + \sum_{(x,v)} U(X-x)$ で与えられるとする。但し、(X, V) は重粒子の状態 (位置と速度) を表し、m は軽粒子達の質量であり、(x, v) は各軽粒子の状態を表す。

即ち、系のランダム性は環境軽粒子の初期条件のみに存在し、環境の初期条件 $\widetilde{\omega} \in Conf(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ さえ与えられれば、系全体は次の常微分方程式に従う。

$$
\begin{cases}
\quad \dfrac{d}{dt} X^{(m)}(t, \widetilde{\omega}) = V^{(m)}(t, \widetilde{\omega}), \\
\dfrac{d}{dt} V^{(m)}(t, \widetilde{\omega}) = -\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \nabla U(X^{(m)}(t, \widetilde{\omega}) - x^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega})) \mu_{\widetilde{\omega}}(dx, dv), \\
(X^{(m)}(0, \widetilde{\omega}), V^{(m)}(0, \widetilde{\omega})) = (X_0, V_0), \\
\\
\quad \dfrac{d}{dt} x^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}) = v^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}), \\
m \dfrac{d}{dt} v^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}) = -\nabla U(x^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}) - X^{(m)}(t, \widetilde{\omega})), \\
(x^{(m)}(0, x, v, \widetilde{\omega}), v^{(m)}(0, x, v, \widetilde{\omega})) = (x, v), \qquad (x, v) \in \widetilde{\omega}.
\end{cases}
$$

ただし、$\mu_{\widetilde{\omega}}(\,\cdot\,)$ は計数測度を表す。また、$\widetilde{\omega}$ の分布は

$$
\widetilde{\lambda_m}(dx, dv) = m^{\frac{d-1}{2}} \rho\Big(\frac{m}{2}|v|^2, x - X_0\Big) dx dv
$$

を intensity として持つ Poisson point process $\widetilde{P_m}$ であるとする。ここで、$\rho(u, z) : [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ は z についてコンパクト台を持つ偶関数で、$u \to \infty$ で z について一様的に十分速く 0 に収束し、次の条件を満たす可測関数である。

A1. 定数 $\overline{v} > 0$ が存在し、任意の $u < \frac{1}{2}\overline{v}^2$ と $z \in \mathbf{R}^d$ において $\rho(u, z) = 0$ である。

即ち、すべての軽粒子の初期運動エネルギーは $\frac{1}{2}\overline{v}^2$ 以上であると仮定する。

これらの設定の下で、重粒子の動きを表す確率過程 $\{(X^{(m)}(t), V^{(m)}(t)); t \geq 0\}$ の $\widetilde{P_m}$ の下での分布は $m \to 0$ の時、ある拡散過程に収束することを証明したい。但し、$C([0, \infty); \mathbf{R}^{2d})$ 上の距離は

$$
dist(w_1, w_2) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Big(1 \wedge \max_{t \in [0,k]} |w_1(t) - w_2(t)|\Big), \qquad w_1, w_2 \in \mathbf{R}^{2d}
$$

である。

[1] は $\overline{v} \geq C_0 := \sqrt{2R_U\|\nabla U\|_\infty}$ （ただし、R_U は U の台の半径である）、即ち、すべての軽粒子の初期速度が $C_0 m^{-\frac{1}{2}}$ 以上であるという仮定の下で、同じ問題を考えた。特に、この仮定の下では、粒子間相互作用は軽粒子を止めるのに十分でなく、すべての軽粒子は重粒子との相互作用有効領域を一定の速度を維持したまま通過できる、即ち、各軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間は $m^{\frac{1}{2}}$ のオーダーで有界である。従って、軽粒子の動きを考えるとき、重粒子は凍結されているとして近似できる。これが [1] の主なアイデアであった。

しかし、もっと現実的なモデルには、$\frac{1}{2}C_0^2$ 以下の初期運動エネルギーを持つ軽粒子も存在する。この時、（もっと簡単なモデルである）凍結近似ですら、有効相互作用領域における滞在時間は有界ではない。例えば、軽粒子が（固定されている）重粒子に向かって真っすぐに向かい、初期エネルギーがちょうどポテンシャル関数の最大値と等しいとき、軽粒子はポテンシャル関数の最大値を与える点に着いたらそこで止まるので、滞在時間は無限大になる。

今回、上述のような、低エネルギーを持つ軽粒子も存在する、即ち、相互作用時間が有界でないモデルを考える。その代わりに、ポテンシャル関数は球対称で、斥力を与えるとする。即ち、次を仮定する：

U1. $U \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$。また、定数 $R_U > 0$ と滑らかな関数 $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在し、$U(x) = h(|x|), \forall x \in \mathbf{R}^d$;$U(x) = 0 \text{ if } |x| \geq R_U$、かつ $h'(a) < 0, \forall a \in (0, R_U)$ とする。さらに、$h''(0) < 0$ とする。

THEOREM 1 以上の条件を仮定する。また、$d > 2(1 + \|h''\|_\infty)(-h''(0))^{-1/2} + 1$ とする。このとき、$\{(X^{(m)}(t), V^{(m)}(t)); t \geq 0\}$ の $\widetilde{P_m}$ の下での分布は $m \to 0$ のとき、生成作用素

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} a_{kl}\frac{\partial^2}{\partial V_k \partial V_l} + \sum_{k,l=1}^{d} b_{kl} V_l \frac{\partial}{\partial V_k} + \sum_{k=1}^{d} V_k \frac{\partial}{\partial X_k}$$

をもつ拡散過程に弱収束する。

係数 a と b はそれぞれ凍結近似の 0-次及び 1-次の誤差項に対応している。極限過程の具体的な定義及び証明のアイデアは講演中に説明する。

References

[1] S. Kusuoka and S. Liang, *A classical mechanical model of Brownian motion with plural particles,* Rev. Math. Phys. 22, no. 7, 733–838 (2010)

[2] S. Liang, *A mechanical model of Brownian motion for one heavy particle including slow light particles,* Submitted for publication

On properties of optimal paths in First Passage Percolation

中島秀太* 京都大学 数理解析研究所 博士後期課程 2 年

キーワード：First Passage Percolation, optimization problem, random environment

概要

伝染病は、病原体がその宿主から他の個体へと移り、連鎖的に感染者数が拡大する伝染性の病気である。それらを数理モデルに置き換える際、例えば接触感染を考えたとしても、接触した時必ず感染するとは限らず、さらに「接触」という個体それぞれの行動に依存する極めて複雑なものを正確に記述することは至難の業である。そのような状況の中でひとつの実現の方法は適当なランダム環境を与え、伝染速度をランダム環境に依存する形で割り当てるというものである。First Passage Percolation はそのような実現の一つであり、動的な伝染モデルとして 1965 年に Hammersley と Welsh により導入された。以下で具体的な定義を述べる。

モデルの定義

隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す。各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には、その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする。また、$\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する。さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を

$$T(x,y) := \inf\{t(\pi) : \ \pi \text{は} x \text{から} y \text{への路}\}.$$

で定義し、最小移動時間を与える路を optimal path と呼ぶことにする。x から y への optimal path 全体の集合を $\mathbb{O}(x,y)$ と置くことにする。

病原体が辺 e の移動にかかる時間を τ_e と考えると、$T(0,x)$ は原点で病原体が発生してから x が感染するまでにかかる時間となる。

講演内容

本講演では optimal path の最近得られたいくつかの性質について述べる。次を満たす時、τ の分布が適切であると言う:

$$\mathbb{P}(\tau_e = \underline{\tau}) < \begin{cases} p_c(d) & \text{if } \underline{\tau} = 0 \\ \vec{p}_c(d) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

*njima@kurims.kyoto-u.ac.jp

ここで $\underline{\tau}$ は τ_e の分布の support の下限、$p_c(d), \vec{p}_c(d)$ はそれぞれ d 次元 percolation モデル、d 次元 oriented percolation モデルの臨界確率である。

一つ目の結果は分布が atom を持つ時の optimal path の数を評価した。

Theorem 1. τ_e の分布が適切で *atom* を持ち *(i.e.,* $\exists a \in \mathbb{R}$ *such that* $\mathbb{P}(\tau_e = a) > 0$ *)*、$\mathbb{E}\tau_e^2 > \infty$ である時、次が確率 1 で成り立つ*:*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sharp\mathbb{O}(0, n\mathbf{e}_1) \leq \limsup_{n} \frac{1}{n} \log \sharp\mathbb{O}(0, n\mathbf{e}_1) < \infty.$$

上の定理から、分布が atom を持つ時、複数の optimal path がどのように分布しているかという問題が考えられる。その問題に対して次のような結果が得られた。

Theorem 2. τ_e の分布が適切かつ $\mathbb{E}\tau_e^2 > \infty$ である時、ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、

$$c_1 n \leq \mathbb{E}\left[\sharp \bigcap_{\Gamma\in\mathbb{O}(0,n\mathbf{e}_1)} \Gamma\right] \leq \mathbb{E}\left[\sharp \bigcup_{\Gamma\in\mathbb{O}(0,n\mathbf{e}_1)} \Gamma\right] \leq c_2 n,$$

ここで路を辺の集合としてみて共通部分、和集合をとっている。

本講演では First Passage Percolation の研究の背景や動機を説明するとともに、証明で使うアイデアについても議論する予定である。

参考文献

[1] A. Auffinger, J. Hanson, and M. Damron. 50 years of first passage percolation, 2015. ArXiv e-print 1511.03262.

[2] Shuta Nakajima Properties of optimal paths in first passage percolation, 2017. ArXiv e-print 1709.03647.

パーコレーションと Cheeger 定数

山本　航平　(東北大学)*

1. パーコレーション

パーコレーションは1957年に Broadbent と Hammersley により提唱された確率論の一種である．無向グラフ $G = (V, E)$ を連結, 局所有限 (locally finite), 頂点推移という条件を満たすものとする．パラメータ $p \in [0, 1]$ を固定し各辺 $e \in E$ がそれぞれ独立に確率 p で open となる現象を考える．このとき $(V, \{\text{open edge}\})$ で構成されるランダムグラフを得る．詳しくは $\Omega = \{\{\omega(e)\}_{e \in E} | \omega(e) \in \{0, 1\}\}$ 上の確率測度として $\mathbb{P}_p = \prod_{e \in E} \mu_e$ が構成される．ここで μ_e は辺 e 上のパラメータ p に関するベルヌーイ測度であり, $\mu_e(\omega(e) = 1) = p, \mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p$ を満たす．グラフ G を無限グラフとして $\omega \in \Omega$ に対して $N = N(\omega)$ をグラフ $(V, \{\text{open edge}\})$ 上の無限な連結成分の個数とする．頂点推移という条件から各 p に対してある $k \in \{0, 1, \infty\}$ が存在して $\mathbb{P}_p(N = k) = 1 \quad a.s.$ が成り立つ [6]．この k に関してある種の臨界現象が成り立つことが知られている．つまり各 G に対してある $p_c = p_c(G)$ が存在して $p > p_c$ ならば $\mathbb{P}_p(N \geq 1) = 1 \quad a.s.$, $p < p_c$ ならば $\mathbb{P}_p(N = 0) = 1 \quad a.s.$ が成り立つ．同様にある $p_u = p_u(G)$ が存在して $p > p_u$ ならば $\mathbb{P}_p(N = 1) = 1 \quad a.s.$, $p_c < p < p_u$ ならば $\mathbb{P}_p(N = \infty) = 1 \quad a.s.$ が成り立つ．それぞれ critical probability, uniquness threshold と呼ぶ. パーコレションの主な研究として与えられたグラフに対して p_c, p_u を求めることが挙げられる. 加えて一般に $N = \infty$ となる区間が存在するとは限らない. つまりグラフによって $p_c = p_u$ が成り立つものが存在する.

2. Cheeger 定数

頂点の部分集合 $S \subset V$ に対して境界 ∂S を定める．ある $y \in S$, $x \in S^C$ そして x, y を端点に持つ辺が存在するとき $x \in \partial S$ と定義する．これをもって $h(G) = \inf_{S \subset V} |\partial S|/|S|$ を Cheeger 定数として定める．Cheeger 定数と p_c と p_u のギャップの関係について次のことが知られている．$h(G) = 0$ ならば $p_c = p_u$ が成り立つ [3]．この逆が成立するか否かが未解決問題として残されている．$h(G) > 0$ を満たすグラフの多くが $p_c < p_u$ が成り立つか否かが示されていない. 重要な例の1つとして regular tree と $\mathbb{Z}$ の Cartesian 積グラフが挙げられる．2つのグラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ に対して Cartesian 積グラフ $G_1 \Box G_2$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
V(G_1 \Box G_2) &= V_1 \times V_2. \\
E(G_1 \Box G_2) &= \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} | x_1 = x_2, \{y_1, y_2\} \in E_2\} \\
&\qquad \cup \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} | y_1 = y_2, \{x_1, x_2\} \in E_1\}.
\end{aligned}
$$

このとき $d \geq 3$ に対して $h(T_d \Box \mathbb{Z}) > 0$ を満たす．先行結果として $d \geq 5$ に対しては $p_c < p_u$ が成り立つことが知られている [7]. 特に無限グラフどうしの Cartesian 積グラ

2010 Mathematics Subject Classification: 60K35, 60J80, 82B43
キーワード：percolation, branching processes
* 〒980-8578　仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号　東北大学 大学院理学研究科
e-mail: kohei.yamamoto.t1@dc.tohoku.ac.jp

フの性質から $p_u < 1$ が成り立つ [5] つまり $N = 0, \infty, 1$ になる 3 つの区間が存在する例となっている.

3. 主結果

グラフ $T_d \square \mathbb{Z}$ の critical probability については $\mathbb{Z}^2$ 上の percolation を利用することで評価をした. 事象 A_n をグラフ $\mathbb{Z}^2$ 上の原点と頂点 $(n, 0)$ が同じ連結成分に含まれるものと定める. このときある関数 $\alpha(p)$ が存在して $\alpha(p) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(A_n)^{1/n}$ を満たす [4]. この $\alpha(p)$ は区間 $[0, 1/2]$ に制限すると狭義単調増加で連続な関数である. よって自然に逆関数を定めることができ, これを用いて $T_d \square \mathbb{Z}$ の critical probability を表すことができる.

主定理 3.1 自然数 $d \geq 2$ に対して次の等式が成り立つ.

$$p_c(T_d \square \mathbb{Z}) \leq \alpha^{-1}(p_c(T_d)).$$

特に $p_c(T_d) = 1/(d-1)$ は既知であることから $\alpha(p)$ を解析することで p_c の上界を求めることができる. 関数 $\alpha(p)$ は $p \leq 1/3$ の範囲で $\alpha(p) > p/(1-p)$ を満たすことを示すことで次の結果を得た.

主定理 3.2 自然数 $d \geq 2$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$p_c(T_d \square \mathbb{Z}) \quad \leq \frac{1}{d}.$$

また $p_c(T_d \square \mathbb{Z})$ の上界を改良したことで次の系を得た.

系 3.3 自然数 $d \geq 4$, グラフ $T_d \square \mathbb{Z}$ に対して $p_c < p_u$ が成り立つ.

参考文献

[1] Aizenman, M., Kesten, H. and Newman, C. M.(1987) *Uniquness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation.* Comm. Math. Phys. 111, no.4, 505-531.

[2] Broadbent, S. R. and Hammersley, J. M.(1957) *Percolation processes I. Crystals and mazes.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 53, 629—641.

[3] Gandolfi, A., Keane, M. S. and Newman, C. M. (1992) *Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses.* Probab. Theory Related Fields 92 (1992), no. 4, 511—527.

[4] Grimmett, Geoffrey.(1999) *Percolation. second edition.* Springer-Verlag, Berlin.

[5] Hggstrm, Olle., Peres, Yuval. and Schonmann, Roberto H. (1999) *Percolation on transitive graphs as a coalescent process: relentless merging followed by simultaneous uniqueness.* Perplexing problems in probability, 69—90, Progr. Probab., 44

[6] Newman, C. M. and Schulman, L. S.(1981) *Number and density of percolating clusters.* J. Phys. A 14, no.7, 1735-1743.

[7] Lyons, Russell and Peres, Yuval(2016) *Probability on trees and networks.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 42.

カントール拡散過程の安定性問題とその応用

土屋 貴裕

Abstract

本講演では 一次元のドリフトなしで non-Lipschitz 拡散係数をもつ確率微分方程式の解の安定性とその応用について述べる．ソース論文は https://arxiv.org/abs/1604.06839 (SPA in Press).

拡散係数が non-Lipschitz であると解の概念自体を整理して考える必要がある．なぜなら Engelbert-Schmidt の弱解の存在と一意性定理，山田渡辺の道ごとの解の一意性などあるように退化の度合いは解の性質を決める上で重要な鍵となっているからである．ここでは単調増大で原点出発する係数について道ごとの一意性が成立する必要十分条件をひとつ導き出しておく．これによって強解における安定性問題を考えことができる．

その上で non-Lipschitz 拡散係数を一様ノルムで近づけた時の安定性を上から評価で特徴づける．この結果は (1/2)-Holder 連続な係数に対する Euler-丸山近似で指摘されているように収束が比較的に遅いこと整合的である．この収束が最適か議論するため，今回は異なるアプローチをとる．すなわち，そのまま近似するのではなく，もとの拡散係数に手を加えた上での収束の安定性の結果を示す．より正確には下から ϵ だけ持ち上げた拡散係数を考える．するとこの係数は 一般化された Nakao-Le Gall 条件を満たし，なおかつ収束は係数に ϵ^{-3} がかかるが多項式のオーダーで，しかもそのオーダーは ϵ に依存しないことが示せる．

具体的な例として λ-Cantor 関数を考える．これは中央部分を $\lambda \in (0,1)$ だけ取り除いて逐次的に構成できる Cantor 集合に対する関数で H_λ-Holder 連続な関数になる，$\mathrm{H}_\lambda \in (0,1)$．それを拡散係数にもつ確率微分方程式を考えることで解の安定性問題が考えられる．先の必要十分条件の命題を踏まえつつ，上記の二通りのアプローチの仕方で上からの評価がだいぶ様相が異なることを示す．

最後に偏微分方程式における一般的な仮定を満たさないが弱解を持つ Fokker-Planck 等式への応用について述べる．さらに最近の Malliavin 解析の結果を援用して滑らかな基本解の存在と一意性を導き出せることを紹介する．

E-mail address: suci@probab.com

会津大学コンピュータ理工学部

本発表は橋本大哉氏 (名古屋医療センター) との共同研究である．

Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations

Tomonori Nakatsu (Shibaura Institute of Technology)*

1 Introduction

This talk is based on [4].

In this talk, we shall deal with the following one-dimensional stochastic differential equation (SDE),

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{1}$$

where $b, \sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are measurable functions and $\{W_t, t \in [0,\infty)\}$ denotes a one-dimensional standard Brownian motion defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. We will consider discrete time maximum and continuous time maximum which are defined by $M_T^n := \max\{X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}\}$ and $M_T := \max_{0\le t\le T} X_t$, respectively, where the time interval $[0,T]$ and the time partition $\Delta_n : 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, $n \ge 2$ are fixed. We use the notations $p_{M_T^n}, p_{M_T}$ and p_{X_T} to denote the density functions of M_T^n, M_T and X_T, respectively.

The first goal of the talk is to show lower and upper bounds of $p_{M_T^n}$. Due to the structure of the upper bound obtained here, it is not immediately apparent whether we can show the pointwise convergence of $p_{M_T^n}(x)$ as $n \to \infty$ for a fixed x. As the second goal, we will show the pointwise convergence of $p_{M_T^n}(x)$ to $p_{M_T}(x)$ as $n \to \infty$ for a fixed x by means of an integration by parts formula. Finally, we will prove the positivity of p_{M_T} and a relationship between p_{M_T} and p_{X_T}.

2 Main results

Assumption (A)

We assume the following.

(A1) For $t \in [0,\infty)$, $b(t,\cdot), \sigma(t,\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ uniformly with respect to $t \in [0,\infty)$.

(A2) There exists $c > 0$ such that $|\sigma(t,x)| \ge c$ for all $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Theorem 1. *Assume (A). Then, the probability density function of M_T^n, $p_{M_T^n}$ satisfies*

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1^n m_2^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{k=1}^n \frac{\pi^{\frac{n-k}{2}}}{2^{\frac{2n-k-1}{2}}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \varphi(D_i(x)) \right) \frac{1}{\sqrt{t_k}} e^{-m_2 \frac{(x-x_0)^2}{t_k}} &\le p_{M_T^n}(x) \\ &\le \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{M_1^n M_2^{\frac{n-1}{2}}} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{t_k}} e^{-M_2 \frac{(x-x_0)^2}{t_k}} + \frac{1}{\sqrt{t_n}} e^{-M_2 \frac{(x-x_0)^2}{t_n}} \right], \end{aligned}$$

for any $x \in \mathbb{R}$, where

$$D_i(x) := \sqrt{\frac{2m_2(t_{i+1}-t_i)}{t_i t_{i+1}}}(x - x_0), i = 1, \cdots, k-1$$

and $\varphi(x) := \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, and $m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$ do not depend on $x, y \in \mathbb{R}$ and $s, t \in [0,T]$

*This research was supported by JSPS KAKENHI(17K14209)

Assumption (B)

We assume that the diffusion coefficient of (1) is of the form $\sigma(t,x) = \sigma_1(t)\sigma_2(x)$ and the following assumption.

(B1) For $t \in [0,\infty)$, $b(t,\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ uniformly with respect to $t \in [0,\infty)$.

(B2) $\sigma_1(\cdot) \in C_b^0([0,\infty);\mathbb{R})$ and there exists $c_1 > 0$ such that $|\sigma_1(t)| \geq c_1$ for any $t \in [0,\infty)$.

(B3) $\sigma_2(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ and there exists $c_2 > 0$ such that $|\sigma_2(x)| \geq c_2$ for any $x \in \mathbb{R}$.

The following proposition provides an expression of p_{M_T}.

Proposition 1. *(Proposition 4 of [3]) Suppose (B). Let $a_0 > x_0$ be fixed arbitrarily. Then, there exists a random variable $H_T(1,a_0) \in L^p(\Omega,P), \forall p \geq 1$ such that*

$$p_{M_T}(x) = E^P\left[\mathbf{1}_{\{M_T > x\}} H_T(1,a_0)\right],$$

for every $x > a_0$.

Theorem 2. *Suppose (B). Let $a_0 > x_0$ be fixed arbitrarily. Then, there exists a random variable $H_T^n(1,a_0) \in L^p(\Omega,P), \forall p \geq 1$ such that*

$$p_{M_T^n}(x) = E^P\left[\mathbf{1}_{\{M_T^n > x\}} H_T^n(1,a_0)\right],$$

for every $x > a_0$. Moreover, $H_T^n(1,a_0)$ converges to $H_T(1,a_0)$ almost surely and in $L^p(\Omega,P), \forall p \geq 1$.

Corollary 1. *Let $a_0 > x_0$ be fixed. Then, we have, for $x > a_0$*

$$p_{M_T^n}(x) \to p_{M_T}(x),$$

as $n \to \infty$.

Theorem 3. *Suppose (B). Then, $p_{M_T}(x) > 0$ for all $x > x_0$.*

Theorem 4. *Suppose (B). Then, it holds that*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{p_{M_T}(x)}{p_{X_T}(x)} \geq 1.$$

References

[1] Gobet, E., Kohatsu-Higa, A.: Computation of greeks for barrier and look-back options using Malliavin calculus. Electron. Commun. Probab. **8**, 51-62 (2003).

[2] Hayashi, M., Kohatsu-Higa, A.: Smoothness of the distribution of the supremum of a multi-dimensional diffusion process. Potential Anal. **38** (1), 57-77 (2013).

[3] Nakatsu, T.: Integration by parts formulas concerning maxima of some SDEs with applications to study on density functions. Stoch. Anal. Appl. **34**(2), 293-317 (2016).

[4] Nakatsu, T.: Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations. Preprint.

[5] Nualart, D.: The Malliavin Calculus and Related Topics, 2nd edn. Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin (2006).

[6] Porper, F.O., Èidel'man, S.D.: Properties of solutions of second-order parabolic equations with lower-order terms. Trans. Moscow Math. Soc. 101-137 (1993).

[7] Shigekawa, I.: Stochastic analysis. Translations of Mathematical Monographs, vol. 224. American Mathematical Society (2004).

Remark on pathwise uniqueness for SDEs driven by Lévy processes

ATSUSHI TAKEUCHI* and HIROSHI TSUKADA†

Consider 1-dimensional stochastic differential equations (SDEs) driven by Lévy processes:

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s)\,ds + \int_0^t b(X_s)\,dW_s + \int_0^t c(X_{s-})\,dZ_s, \tag{1}$$

where $W = \{W_t\,;\, t \geq 0\}$ is a 1-dimensional Brownian motion and $Z = \{Z_t\,;\, t \geq 0\}$ is a 1-dimensional Lévy process. We shall investigate the pathwise uniqueness for the SDE. Recall the known results on the pathwise uniqueness for the SDEs (1) where Z is a stable process of index $1 < \alpha < 2$ with parameters (r_-, r_+) characterized by the triplet $\left(\gamma_\alpha, 0, \nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz)\right)$ as follows: r_+, r_- are non-negative constants with $r_- \leq r_+$, and

$$\nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz) = |z|^{-\alpha-1}\left\{r_-\,\mathbb{I}_{(z<0)} + r_+\,\mathbb{I}_{(z>0)}\right\}dz, \quad \gamma_\alpha = -\int_{|z|>1} z\,\nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz).$$

- It is well-known that the pathwise uniqueness holds if a, b, c are Lipschitz condition.
- As for the case without the process Z, that is, when $c = 0$, Yamada and Watanabe [5] have proved the pathwise uniquness if a is locally Lipschitz continuous and b is locally $1/2$-Hölder continuous.
- In case where the driving process is a symmetric pure-jump type, that is, when $a, b = 0$ and $r_- = r_+$, Komatsu [2] has done if c is locally $1/\alpha$-Hölder continuous.
- As for the case without the process W, that is, when $b = 0$, Fournier [1] has proved the pathwise uniqueness if a is decreasing and continuous and c is increasing and $(\alpha-\beta)/\alpha$-Hölder-continuous where $\beta = \beta(\alpha, r_-/r_+) \in [\alpha-1, 1]$ satisfies that $\int_{\mathbb{R}_0}\left\{|1+z|^\beta - 1 - \beta z\right\}\nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz) = 0$.
- When the process Z is a spectrally stable process that is, $r_- = 0$, Li and Mytnik [3] have done if a is decreasing and continuous and b is locally $1/2$-Hölder continuous and c is increasing and locally $(\alpha-1)/\alpha$-Hölder continuous.

In this talk, we study the problem on the pathwise uniqueness of the solutions to the SDEs (1) where Z is a Lévy process characterized by the triplet $\left(\gamma^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho, 0, \nu^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho(dz)\right)$ where $\nu^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho$ is the Lévy measure given by

$$\nu^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho(dz) = \rho(z)\left(|z|^{-\alpha_- -1}\,\mathbb{I}_{(z<0)} + |z|^{-\alpha_+ -1}\,\mathbb{I}_{(z>0)}\right)dz,$$

where ρ is a bounded measurable function such that

$$\rho(0+) = \lim_{z\to 0+}\rho(z) > 0, \quad \rho(0-) = \lim_{z\to 0-}\rho(z) \geq 0,$$

*E-mail address: takeuchi@sci.osaka-cu.ac.jp, Postal address: Department of Mathematics, Osaka City University, Sugimoto 3-3-138, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan.

†E-mail address: d15sac0p04@st.osaka-cu.ac.jp, Postal address: Department of Mathematics, Osaka City University, Sugimoto 3-3-138, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan.

and α_-, $\alpha_+ \in (1,2)$ such that $\alpha_- \leq \alpha_+$, and $\gamma_\rho^{\alpha_-,\alpha_+}$ is the drift parameter given by $\gamma_\rho^{\alpha_-,\alpha_+} = -\int_{|z|>1} z\, \nu_\rho^{\alpha_-,\alpha_+}(dz)$. Our class of driving processes includes parts of stable processes, truncated stable ones, tempered stable ones and relativistic stable ones. In this talk, we shall obtain the condition on the drift coefficient a and the Hölder conditions on diffusion coefficients b, c under which the pathwise uniqueness can be justified for the SDE driven by such processes.

- For each $N > 0$, there exists a positive constant $K_1(N)$ satisfying with

$$|b(x) - b(\tilde{x})| \leq K_1(N)\, |x - \tilde{x}|^{(2-\beta)/2}, \quad \text{for all } |x|, |\tilde{x}| \leq N. \tag{2}$$

- For each $N > 0$, there exists a positive constant $K_2(N)$ satisfying with

$$|c(x) - c(\tilde{x})| \leq K_2(N)\, |x - \tilde{x}|^{(\alpha_+ - \beta)/\alpha_+}, \quad \text{for all } |x|, |\tilde{x}| \leq N. \tag{3}$$

Theorem 1 *Let $\alpha_- = \alpha_+ =: \alpha$ and $\rho(0-) \leq \rho(0+)$. Write $\beta_0 = \beta(\alpha, \rho(0-)/\rho(0+))$ where*

$$\beta(\alpha, \rho(0-)/\rho(0+)) := \frac{1}{\pi} \arccos \left[\frac{\rho(0-)^2 \sin^2(\pi\alpha) - \{\rho(0+) + \rho(0-) \cos(\pi\alpha)\}^2}{\rho(0-)^2 \sin^2(\pi\alpha) + \{\rho(0+) + \rho(0-) \cos(\pi\alpha)\}^2} \right].$$

Suppose that the coefficients of the SDE (1) satisfy the conditions (2), (3) with $\beta \in (0, \beta_0)$, and that the function a is decreasing and the function c is increasing. Then, the pathwise uniqueness of the solutions to the SDE (1) can be justified.

Theorem 2 *Let $\alpha_- < \alpha_+$. Suppose that the coefficients a, b, c satisfy the conditions (2), (3) with $\beta \in (0, 1)$, and that the function a is decreasing and the function c is increasing. Then, the pathwise uniqueness of the solutions to the SDE (1) can be justified.*

References

[1] N. Fournier: On pathwise uniqueness for stochastic differential equations driven by stable Lévy processes, *Annales de l'Institute Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques* **49** (2013), 138 – 159. DOI: 10.1214/11-AIHP420.

[2] T. Komatsu: On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations of jump type, *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* **58** (1982), 383 – 386. DOI: 10.3792/pjaa.58.353.

[3] Z. Li and L. Mytnik: Strong solutions for stochastic differential equations with jumps, *Annales de l'Institute Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques* **47** (2011), 1055 – 1067. DOI: 10.1214/10-AIHP389.

[4] A. Takeuchi and H. Tsukada: Remark on pathwise uniqueness of stochastic differential equations driven by Lévy processe, in preparation.

[5] T. Yamada and S. Watanabe: On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, *Journal of Mathematics of Kyoto University* **11** (1971), 155 – 167. DOI: 10.1215/kjm/1250523691.

ゼータ分布に従う確率変数の一次結合と無限分解可能性

吉川 和宏
立命館大学 理工学部

1. 概要

確率変数 $X_1, \ldots, X_d$ の同時分布が多次元正規分布となる必要十分条件は、任意の一次結合 $\sum_{k=1}^{d} a_k X_k$ $(a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R})$ の分布が一次元正規分布になることでよく知られている。しかし正規分布がもつ無限分解可能性に関して同様な十分条件は成立しない。つまり任意の一次結合の分布は無限分解可能であるが、それらの同時分布は無限分解可能でないものが存在する ([4] において、ウィッシャート分布が例として挙げられている)。そこで本講演では、任意の一次結合の分布が無限分解可能であれば、それらの同時分布が無限分解可能になるような確率分布のクラスを考える。その例のひとつとしてゼータ分布を紹介する。

2. ゼータ関数とゼータ分布

定義 2.1 (リーマン・ゼータ関数, [2] 等参照)**.** $s = \sigma + \mathrm{i}t \in \mathbb{C}$ $(\sigma > 1, t \in \mathbb{R})$ に対し、リーマン・ゼータ関数は以下のディリクレ級数 (1) で定義されて、オイラー積 (2) をもつ。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

$$= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}. \tag{2}$$

ここで $\mathbb{P}$ は素数全体である。

この無限級数及び無限積の絶対収束領域 $\sigma > 1$ において、リーマン・ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が定義される。

定義 2.2 (リーマン・ゼータ分布)**.** $\sigma > 1$ に対して、以下で与えられる確率測度 μ_σ をリーマン・ゼータ分布という。

$$\mu_\sigma(\{-\log n\}) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

リーマン・ゼータ分布は、古くは Khinchine [5] の文献等に記されている。この分布の特徴として、特性関数が $f_\sigma(t) = \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)/\zeta(\sigma)$ $(t \in \mathbb{R})$ となることや無限分解可能であること等が挙げられる。

命題 2.3 ([3] 等参照)**.** リーマン・ゼータ分布 μ_σ は複合ポアソン分布である。またそのレヴィ測度 N_σ は、

$$N_\sigma(dx) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p^{-r\sigma}}{r} \delta_{r \log p}(dx)$$

となる。ここで δ_x は点 x におけるデルタ分布である。

近年では、[1] において青山と中村が多次元新谷ゼータ関数を導入することにより、リーマン・ゼータ分布を拡張する形で、ある多次元離散分布のクラス (多次元新谷ゼータ分布) を定義している。

定義 2.4 (多次元新谷ゼータ関数, [1]). $d,\, m,\, r \in \mathbb{N},\, \vec{s} \in \mathbb{C}^d,\, (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ とする。このとき $\lambda_{lj}, u_j > 0,\, \vec{c}_l \in \mathbb{R}^d$ $(1 \leq j \leq r,\, 1 \leq l \leq m)$、及び $|\theta(n_1, \ldots, n_r)| = O((n_1 + \cdots + n_r)^{\varepsilon})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ を満たす複素数値関数 $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ に対し、多重無限級数

$$Z_S(\vec{s}) = \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{\prod_{l=1}^{m} (\sum_{k=1}^{r} (\lambda_{lk}(n_k + u_k))^{\langle \vec{c}_l, \vec{s} \rangle}}$$

を多次元新谷ゼータ関数という。

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積とし、$\vec{s} = \vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t},\, \vec{\sigma}, \vec{t}, \vec{c} \in \mathbb{R}^d$ に対して、$\langle \vec{c}, \vec{s} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{\sigma} \rangle + \mathrm{i} \langle \vec{c}, \vec{t} \rangle$ とする。また $Z_S(\vec{s})$ は、$\min_{1 \leq l \leq m} \langle \vec{c}_l, \vec{\sigma} \rangle > r/m$ を絶対収束領域 ($\mathrm{D_S}$ とおく) としてもち、その領域において $\theta(n_1, \cdots, n_r)$ を定符号とするとき $\mathbb{R}^d$ 上の分布が次のように定義できる。

定義 2.5 (多次元新谷ゼータ分布, [1]). $\vec{\sigma} \in \mathrm{D_S}$ に対し、以下で与えられる $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $\mu_{\vec{\sigma}}$ を多次元新谷ゼータ分布という。

$$\mu_{\vec{\sigma}}\Bigg(\bigg\{ -\sum_{l=1}^{m} c_{l1} \log\Big(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k + u_k)\Big), \ldots, -\sum_{l=1}^{m} c_{ld} \log\Big(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k + u_k)\Big)\bigg\}\Bigg)$$
$$= \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{Z_S(\vec{\sigma})} \prod_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k + u_k) \right)^{-\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma} \rangle}, \quad (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}.$$

この分布の特性関数は $f_{\vec{\sigma}}(\vec{t}) = Z_S(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t})/Z_S(\vec{\sigma})$ $(\vec{t} \in \mathbb{R}^d)$ で与えられる。

3. リーマン・ゼータ分布に従う確率変数の一次結合

リーマン・ゼータ分布をもつ確率変数の一次結合と無限分解可能性について、次の結果を得ている。

定理 3.1. リーマン・ゼータ分布 $\mu_{\sigma_1}, \ldots, \mu_{\sigma_d}$ $(\sigma_1, \ldots, \sigma_d > 1)$ に従う確率変数を $X_1, \ldots, X_d$ とする。このとき次の条件 (1) と (2) は同値である。

(1) $X_1, \ldots, X_d$ の同時分布が無限分解可能である。

(2) $X_1, \ldots, X_d$ の任意の一次結合 $\sum_{k=1}^{d} a_k X_k$ $(a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R})$ の分布が無限分解可能である。

リーマン・ゼータ分布に従う確率変数 $X_1, \ldots, X_d$ の同時分布及び一次結合の分布はそれぞれ d 次元、1 次元の多次元新谷ゼータ分布のクラスに含まれる。しかし、すべての多次元新谷ゼータ分布が無限分解可能ではない。本講演では多次元新谷ゼータ分布が無限分解可能となる条件と一次結合の関係性について解説する予定である。

参考文献

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, Tokyo J. Math. **36** (2013), 521–538.

[2] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, (1976).

[3] D. Applebaum, Lévy Processes and Stochastic Calculus, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2009).

[4] M. Dwass and H. Teicher, On infinitely divisible random vectors, Ann. Math. Statist. **28** (1957), 461–470.

[5] A. Ya. Khinchine, Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian), Moscow and Leningrad, (1938).

区間力学系の大偏差原理とレート関数の零点の構造について

高橋　博樹

Consider a dynamical system $f\colon X\to X$ of a compact space X. The theory of large deviations deals with the behavior of the empirical mean

$$\delta_x^n=\frac{1}{n}\left(\delta_x+\delta_{f(x)}+\cdots+\delta_{f^{n-1}(x)}\right)\quad \text{as } n\to+\infty,$$

where δ_x denotes the Dirac measure at x. We put a Lebesgue measure $|\cdot|$ on X as a reference measure, and ask the asymptotic behavior of the empirical mean for Lebesgue almost every initial condition.

Let $\mathcal{M}$ denote the space of Borel probability measures on X endowed with the topology of weak convergence. We say *the Large Deviation Principle* (the LDP) holds if there exists a lower semi-continuous function $\mathscr{I}=\mathscr{I}(f;\cdot)\colon\mathcal{M}\to[0,+\infty]$ which satisfies the following:

- (lower bound) for every open subset $\mathcal{G}$ of $\mathcal{M}$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\{x\in X\colon \delta_x^n\in\mathcal{G}\}|\geq-\inf_{\mu\in\mathcal{G}}\mathscr{I}(\mu);$$

- (upper bound) for every closed subset $\mathcal{K}$ of $\mathcal{M}$,

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\{x\in X\colon \delta_x^n\in\mathcal{K}\}|\leq-\inf_{\mu\in\mathcal{K}}\mathscr{I}(\mu),$$

where $\log 0=-\infty$, $\inf\emptyset=\infty$ and $\sup\emptyset=-\infty$. The function $\mathscr{I}$ is called *a rate function*.

For a transitive uniformly hyperbolic system with Hölder continuous derivative, the LDP was established by Takahashi [6], Orey and Pelikan [5], Kifer [4], and Young [8]. For non-hyperbolic systems, few results on the LDP were available until recently. A substantial progress has been made in [1] in which the LDP was established for *every* multimodal map with non-flat critical point and Hölder continuous derivatives that is topologically exact. Our aim here is to establish the LDP for unimodal maps with non-recurrent flat critical point. We also study the structure of the set of zeros of the rate function for a concrete unimodal map.

In what follows, let $X=[0,1]$ and $f\colon X\to X$ be *a unimodal map*, i.e., a C^1 map whose critical set $\{x\in X\colon Df(x)=0\}$ consists of a single point $c\in(0,1)$ that is an extremum. We say f is *topologically exact* if for any open subset U of X there exists an integer $n\geq1$ such that $f^n(U)=X$ *An S-unimodal map* is a unimodal map of class C^3 on $X\setminus\{c\}$ with negative Schwarzian derivative. Let $\omega(c)$ denote the omega-limit set of c. The critical point c is *non-recurrent* if $c\notin\omega(c)$, and is *flat* if there exists a C^3 function ℓ on $X\setminus\{c\}$ such that:

(i) $\ell(x)\to+\infty$ and $|D\ell(x)|\to+\infty$. Here, $x\to c$ indicates both as $x\to c+0$ and $x\to c-0$;

(ii) there exist C^1 diffeomorphisms ξ, η of $\mathbb{R}$ such that $\xi(c)=0=\eta(f(c))$ and $|\xi(x)|^{\ell(x)}=\eta(f(x))$ for all x near c.

The flat critical point c is *of polynomial order* if there exists a C^3 function v on X such that $v(c)>0$ and for all x near c, $\ell(x)=|x-c|^{-v(x)}$. Define $\mathscr{F}=\mathscr{F}(f;\cdot)\colon\mathcal{M}\to[-\infty,0]$ by

$$\mathscr{F}(\nu)=\begin{cases}h(\nu)-\int\log|Df|d\nu & \text{if } \nu \text{ is } f\text{-invariant;}\\ -\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

The $-\mathscr{F}$ is not lower semi-continuous. Hence, we introduce its lower semi-continuous regularization $\mathscr{I}=\mathscr{I}(f;\cdot)$ by

$$\mathscr{I}(\mu)=-\inf_{\mathcal{G}\ni\mu}\sup_{\nu\in\mathcal{G}}\mathscr{F}(\nu),$$

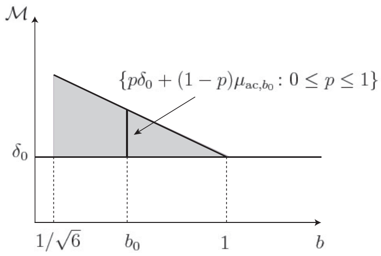


FIGURE 1. The sets of zeros of the rate functions for the family $\{f_b\}_{b>0}$.

where the infimum is taken over all open subsets $\mathcal{G}$ of $\mathcal{M}$ containing μ.

Theorem A. ([2]) *Let $f\colon X \to X$ be a topologically exact S-unimodal map with non-recurrent flat critical point that is of polynomial order. Then the LDP holds. The rate function is given by $\mathscr{I}$.*

We now consider a parametrized family $\{f_b\}_{b>0}$ of unimodal maps given by

$$f_b(x) = \begin{cases} -2^{2^b} |x-1/2|^{|x-1/2|^{-b}} + 1 & \text{for } x \in [0,1] \setminus \{1/2\}; \\ 1 & \text{for } x = 1/2. \end{cases}$$

The $1/2$ is a flat critical point of polynomial order. Theorem A applies to the map f_b. This map has an invariant measure that is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. This measure is finite if and only if $b < 1$. In this case, the normalized measure is denoted by $\mu_{\mathrm{ac},b}$. We have a complete characterization of the zeros of the rate function for f_b:

Theorem B. ([2]) *The following holds for $\{f_b\}$:*
- *for $1/\sqrt{6} \le b < 1$, $\mathscr{I}(f_b;\mu) = 0$ if and only if there exists $p \in [0,1]$ such that $\mu = p\delta_0 + (1-p)\mu_{\mathrm{ac},b}$;*
- *for $b \ge 1$, $\mathscr{I}(f_b;\mu) = 0$ if and only if $\mu = \delta_0$.*

Combining the result [7, Theorem A.2] and that of Freitas and Todd [3] one can show that $b \in [1/\sqrt{6}, 1) \mapsto \mu_{\mathrm{ac},b} \in \mathcal{M}$ is continuous (continuous in the L^1 norm). Also, one can show that $\mu_{\mathrm{ac},b}$ converges weakly to δ_0 as $b \nearrow 1$. As a consequence, the set of zeros of the rate function for f_b depends continuously on $b > 0$ (See FIGURE 1).

REFERENCES

[1] Y. M. Chung, J. Rivera-Letelier and H. Takahasi, Large deviation principle in one-dimensional dynamics. https://arxiv.org/pdf/1610.00822.pdf

[2] Y. M. Chung and H. Takahasi, Large deviation principle for S-unimodal maps with flat critical point. https://arxiv.org/pdf/1708.03695.pdf

[3] J. Freitas and M. Todd, The statistical stability of equilibrium states for interval maps. Nonlinearity **22** (2009) 259–281.

[4] Y. Kifer. Large deviations in dynamical systems and stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **321** (1990) 505–524.

[5] S. Orey and S. Pelikan, Deviations of trajectory averages and the defect in Pesin's formula for Anosov diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989) 741–753.

[6] Y. Takahashi. Asymptotic behaviours of measures of small tubes: entropy, Liapunov's exponent and large deviation. In *Dynamical systems and applications (Kyoto, 1987)*, volume 5 of *World Sci. Adv. Ser. Dynam. Systems*, pages 1–21. World Sci. Publishing, Singapore, 1987.

[7] H. Takahasi. Statistical properties for S-unimodal Misiurewicz maps with flat critical point. submitted

[8] L.-S. Young. Large deviations in dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990) 525–543.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIVERSITY, YOKOHAMA, 223-8522, JAPAN
E-mail address: hiroki@math.keio.ac.jp

Multiray generalization of the arcsine laws for occupation times of infinite ergodic transformations

Toru Sera (Kyoto Univ.) and Kouji Yano (Kyoto Univ.)

In this talk, we consider a certain distributional convergence of occupation time ratios for ergodic transformations preserving an infinite measure. We give a general limit theorem which can be regarded as a multiray extension of the 2-ray results by Thaler [3] and Thaler–Zweimüler [4]. We also explain applications to interval maps with indifferent fixed points.

1 Multiray generalized arcsine laws

Let $N \geq 2$ be an integer. For $\alpha \in (0, 1)$ and $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in [0, 1]^N$ with $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$, let $(Z_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geq 0}$ be a *skew Bessel diffusion process*, starting at 0, of dimension $2-2\alpha \in (0, 2)$ and with skewness parameter β on N rays which are all connected at 0. In the special case of $N = 2$ and $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = 1/2$, this process is nothing else but a standard one-dimensional Brownian motion. Let us denote by $A_i^{(\alpha,\beta)}$ the occupation time of $(Z_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geq 0}$ on i-th ray up to time 1 for $i = 1, \ldots, N$. Barlow–Pitman–Yor [1] showed

$$\left(A_i^{(\alpha,\beta)}\right)_{i=1}^N \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(\frac{\xi_i}{\sum_{j=1}^N \xi_j}\right)_{i=1}^N,$$

where $\xi_1, \ldots, \xi_d$ are $\mathbb{R}_+$-valued independent random variables with the one-sided α-stable distributions characterized by $\mathbb{E}[\exp(-\lambda\xi_i)] = \exp(-\beta_i\lambda^\alpha)$ for $\lambda > 0,\ i = 1, \ldots, N$. In the special case of $\alpha = \beta_1 = 1/2$, the $A_1^{\alpha,\beta}$ is arcsine distributed.

2 Main results

Let $(X, \mathcal{B}, \mu)$ be a standard measurable space with a σ-finite measure such that $\mu(X) = \infty$, and let $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ be a conservative, ergodic, measure preserving transformation (which is abbreviated by *CEMPT*), i.e., $\mu T^{-1} = \mu$ and $\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_A(T^k x) = \infty$, μ-a.e.x, for any $A \in \mathcal{B}$ with $\mu(A) > 0$.

Assumption 2.1. The state space X is decomposed into $X = \sum_{i=1}^N X_i + Y$ for the *rays* $X_i \in \mathcal{B}$ with $\mu(X_i) = \infty$ $(i = 1, \ldots, N)$ and the *junction* $Y \in \mathcal{B}$ with $\mu(Y) = 1$ such that, *when the orbit* $(T^k x)_{k\geq 0}$ *changes rays, it must visit the junction.*

We will denote by $H_n(x)$ the n-th hitting time of $(T^k x)_{k\geq 0}$ for Y. Set

$$\begin{aligned}\ell_i^{n+1}(x) &:= \max\{k \geq 1\,;\, T^{H_n+1}x, \dots, T^{H_n+k}x \in X_i\}, \quad x \in Y,\\ \ell^n &:= (\ell_1^n, \dots, \ell_N^n),\end{aligned}$$

where $\max\emptyset = 0$. Note that ℓ_i^n is the *n-th X_i-side excursion length of $(T^k x)_{k\geq 0}$ from Y*, and the sequence $(\ell^n)_{n\geq 1}$ is stationary w.r.t. a probability measure $\mu_Y := \mu(\cdot \cap Y)$.

Assumption 2.2. The sequence $(\ell^n)_{n\geq 1}$ under μ_Y may be regarded to be i.i.d. in a certain asymptotical sense.

Set $S_{n,i}(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_i}(T^k x)$ for $n \geq 0$, $i = 1, \dots, N$. We now give our general limit theorem as follows.

Theorem 2.3 (S.–Yano [2])**.** *Let $\alpha \in (0,1)$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in [0,1]^N$ with $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$. Suppose that T is a CEMPT on $(X, \mathcal{B}, \mu)$ and that Assumptions 2.1 and 2.2 hold. We consider the following conditions:*

(i) *For each $i = 1, \dots, N$ and $\lambda > 0$,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_Y(\ell_i^1 > \lambda r)}{\mu_Y(|\ell^1| > r)} = \beta_i \lambda^{-\alpha}.$$

(ii) *For any probability measure $\nu \ll \mu$ on X,*

$$\left(n^{-1} S_{n,i}\right)_{i=1}^N \text{ under } \nu \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \left(A_i^{(\alpha,\beta)}\right)_{i=1}^N.$$

Then, (i) *implies* (ii)*. Furthermore, if $\beta \in [0,1)^N$, then* (ii) *implies* (i)*.*

The case $N = 2$ was due to [3] and [4]. The proofs in [3] and [4] were based on the moment method, which does not seem to be suitable for our multiray case. We adopt instead the double Laplace transform method, which was utilized in the study [1] of occupation times of diffusions on multiray.

References

[1] M. Barlow, J. Pitman and M. Yor, Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus. *Séminaire de Probabilités*, XXIII, 294–314, *Lecture Notes in Math.* **1372**, Springer, Berlin, 1989.

[2] T. Sera and K. Yano, Multiray generalization of the arcsine laws for occupation times of infinite ergodic transformations, Preprint available at arXiv:1711.03260.

[3] M. Thaler, A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **22** (2002), no. 4, 1289–1312.

[4] M. Thaler and R. Zweimüller, Distributional limit theorems in infinite ergodic theory. *Probab. Theory Related Fields*, **135** (2006), no. 1, 15–52.

確率 Fourier 係数による random 関数の再構成について

星野　浄生　(大阪府立大学)*

1.　序

Random 関数 (乱関数) が確率 Fourier 係数 (SFC) から再構成できるか, という問題が [1] 〜[6], [8] で論じられてきた．乱関数が causal な場合については [1], [2] で論じられている．本講演では, 乱関数が noncausal な場合を考える．SFC が Ogawa 積分で与えられた場合についての結果は [5], [6] で与えられている．[5] では, 絶対連続な乱関数の同定について, 確率 Fourier 変換 ([1], [2]) の手法が採用されている．本研究では, 確率 Fourier 変換とは異なる手法を用いて任意の有界変動過程及びそれから定まる確率微分が SFC で特定される事を得た．このことを用いて, 絶対連続な Wiener 汎関数は Skorokhod 積分で与えられた SFC から復元できる事も得た．ここで, それぞれの過程の絶対値は, SFC を定める Brown 運動の値を用いずに復元される．

2.　設定

$(B_t)_{t\in[0,\infty)}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の Brown 運動, $0 < L < \infty$ とし, $L = \infty$ のとき $[0, L]$ を $[0, \infty)$ とみなす．$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $L^2([0, L]; \mathbb{C})$ の compact support 関数からなる CONS とする．Ogawa 積分, Sobolev 空間, Skorokhod 積分をそれぞれ $\int_0^L d_{\mathrm{u}}B$, $\mathcal{L}_i^{r,2}$, $\int_0^L dB$ と表す ([7] の定義 1,2,4 を参照)．(Noncausal な) 乱関数 a, b は $a \in L^2([0, L]; \mathbb{R})$ a.s. $b \in L^2([0, L]; \mathbb{C})$ a.s. を満たすとする．

定義 1 (乱関数の確率微分の SFC-O) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し, ae_i は Ogawa 積分可能であるとする．Ogawa 積分 $\int_0^L \cdot\, d_{\mathrm{u}}B$ による確率微分

$$d_{\mathrm{u}}Y_t = a(t)\, d_{\mathrm{u}}B_t + b(t)\, dt \quad , t \in [0, L]$$

の $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に関する確率 Fourier 係数 (SFC-O) $(e_i, d_{\mathrm{u}}Y)$ を次で定義する．

$$(e_i, d_{\mathrm{u}}Y) := \int_0^L e_i(t)\, d_{\mathrm{u}}Y_t = \int_0^L a(t)e_i(t)\, d_{\mathrm{u}}B_t + \int_0^L b(t)e_i(t)\, dt.$$

定義 2 (Noncausal Wiener 汎関数の確率微分の SFC-S) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し, $ae_i \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ であるとする．Skorokhod 積分 $\int_0^L \cdot\, dB$ による確率微分

$$dX_t = a(t)\, dB_t + b(t)\, dt \quad , t \in [0, L]$$

の $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に関する確率 Fourier 係数 (SFC-S) (e_i, dX) を次で定義する．

$$(e_i, dX) := \int_0^L e_i(t)\, dX_t = \int_0^L a(t)e_i(t)\, dB_t + \int_0^L b(t)e_i(t)\, dt.$$

*e-mail: `su301032@edu.osakafu-u.ac.jp`

3. 主結果

定理 1 (有界変動過程の確率微分のSFC-Osによる同定) a を可測有界変動過程とする．a, b は確率微分 $d_{\mathrm{u}}Y_t = a(t)\,d_{\mathrm{u}}B_t + b(t)\,dt$ の $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に関するSFC-Osの系 $((e_i, d_{\mathrm{u}}Y))_{i\in\mathbb{N}}$ で構成できる.

注1) a が概左連続でもあれば, a.s. で $a \in C[0, L]$ が構成できる.
注2) 有限個の $(e_i, d_{\mathrm{u}}Y)$ を除いても a は構成できる.
注3) $|a|$ の構成の過程で $(B_t)_{t\in[0,L]}$ を要しない.

命題 1 (Hilbert-Schmidt積分表示されたWiener汎関数のOgawa積分) $K \in L^2([0, L]^2), f \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ とするとき,

$$F(t) := \int_0^L K(t, s) f(s)\,ds$$

はu-可積分で, そのOgawa積分は次で与えられる.

$$\int_0^L F(t)\,d_{\mathrm{u}}B_t = \int_0^L F(t)\,dB_t + \int_0^L \int_0^L K(t, s) D_t f(s)\,ds\,dt \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

系 1 (絶対連続なWiener汎関数のOgawa積分) a を概絶対連続で, $a' \in \mathcal{L}_1^{1,2}, a(0) \in \mathcal{L}_0^{1,2}$ とする．また, $e \in L^2[0, L]$ をcompact supportとする．このとき, ae のOgawa積分は次のように表示できる.

$$\int_0^L ae(t)\,d_{\mathrm{u}}B_t = \int_0^L ae(t)\,dB_t + \int_0^L \Big(\int_0^t D_t a'(s)\,ds + D_t a(0) \Big) e(t)\,dt \quad \text{in } L^2(\Omega) \text{ and a.s.}$$

定理 2 (絶対連続なWiener汎関数の確率微分のSFC-Ssによる同定) a を概絶対連続で $a' \in \mathcal{L}_1^{1,2}, a(0) \in \mathcal{L}_0^{1,2}$ とする．このとき, a.s. で $a \in C[0, L]$ と b は確率微分 $dX_t = a(t)\,dB_t + b(t)\,dt$ の $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に関するSFC-Ssの系 $((e_i, dX))_{i\in\mathbb{N}}$ により構成できる.

注1) 有限個の (e_i, dX) を除いても a は構成できる.
注2) $|a|$ の構成の過程で $(B_t)_{t\in[0,L]}$ を要しない.

参考文献

[1] S. Ogawa, On a stochastic Fourier transformation. An International Journal of Probability and Stochastic Processes. Vol. 85. **2**, 286-294 (2013)

[2] S. Ogawa, A direct inversion formula for SFT. The Indian Journal of Statistics Vol. 77-A. **1**, 30-45 (2014)

[3] S. Ogawa, H. Uemura, On a stochastic Fourier cofficient: case of noncausal functions. J.Theoret. Probab. **27**, 370-382 (2014)

[4] S. Ogawa, H. Uemura, Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier cofficients. Bull. Sci. Math. **138**, 147-163 (2014)

[5] S. Ogawa, H. Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs. 数理解析研究所講究録. **1952**, 128-134 (2015-06)

[6] 小川重義, 植村英明, Haar 系SFC による非因果的関数の同定. 日本数学会秋季総合分科会, 予稿 (2015.9)

[7] 星野浄生, 数見哲也, 非因果的なWiener汎関数のOgawa積分可能性. 日本数学会年会, 予稿 (2016.3)

[8] 星野浄生, 数見哲也, 非因果的なWiener 汎関数のSFC による同定. 日本数学会秋季総合分科会, 予稿 (2016.9)

一般CONSの確率フーリエ係数による乱関数の復元について*

植村 英明 （愛知教育大学）
小川 重義 （立命館大学）

(i) 確率 Fourier 係数. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$W.$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の Brown 運動，$f(t,\omega)$ を $[0,1]\times\Omega$ 上のランダム関数とする。$L^2([0,1],dt)$ の完全正規直交基底 $\{\varphi_n(t)\}$ に対して，

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_0^1 f(t,\omega)\overline{\varphi_n(t)}dW_t \tag{1}$$

を $f(t,\omega)$ の $\{\varphi_n(t)\}$ に対する確率 Fourier 係数 (SFC) と呼ぶ。ここで $\bar{z}$ は z の複素共役を表す。SFC (1) は，CONS $\{\varphi_n(t)\}$ および確率積分 $dW.$ の選択により定まることに注意する。我々の目的は $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ から元の関数 $f(t,\omega)$ を再構成することにある。再構成において SFCs 以外の情報を用いないとき「強い意味での」再構成，用いる場合には「広い意味での」再構成という。今回の発表では確率積分として Ogawa 積分を選択し，CONS としては特定のものを仮定しない。本講ではまず Ogawa 積分について些かの一般論を展開する。その後 SFC と H^1 基底による Ogawa 積分の表現について説明したのち，強い意味および広い意味での再構成問題を考察する。

(ii) Ogawa 積分. CONS $\{\psi_n(t)\}$ に対して $\sum \int_0^1 f(t,\omega)\overline{\psi_n(t)}dt \int_0^1 \psi_n(t)dW_t$ が確率収束するとき，$f(t,\omega)$ は $\{\psi_n(t)\}$ に関して Ogawa 積分可能であるといい，その和を $\{\psi_n(t)\}$-Ogawa 積分とよび $\int_0^1 f(t,\omega)d_\psi W_t$ と記す。

$\{\psi_n(t), n\in\mathbb{N}\}$, $\{\chi_n(t), n\in\mathbb{N}\}$ をそれぞれ $L^2([0,1],dt)$ の CONS とする。ランダム関数 $f(t,\omega)$ と $L^2([0,1],dt)$ 関数 $\alpha(t)$ に次の仮定をおく。

(O1) $\exists\{\lambda_n\}$ s.t. $\lambda_n > 0, \sum\lambda_n < \infty,\quad E\sum \dfrac{1}{\lambda_n}\left|\int_0^1 f(t,\omega)\overline{\chi_n(t)}dt\right|^2 < \infty$

(O2) $\alpha(t)\chi_\ell(t) \in L^2([0,1],dt)\quad \&\quad \sup_\ell \int_0^1 |\alpha(t)\chi_\ell(t)|^2 dt < \infty$

(O3) $\alpha(t)\psi_k(t) \in L^2([0,1],dt)$

命題 1. *(O1), (O2), (O3)* の下で

$$\int_0^1 f(t,\omega)\alpha(t)d_\psi W_t = \sum_{\ell=1}^\infty \int_0^1 f(t,\omega)\overline{\chi_\ell(t)}dt \int_0^1 \alpha(t)\chi_\ell(t)dW_t$$

が成り立つ。

*本研究は JSPS 科研費 26400152 の助成を受けたものです。

注意 1. $\alpha(t)=1$ とすると $\displaystyle\int_0^1 f(t,\omega)d_\psi W_t = \int_0^1 f(t,\omega)d_\chi W_t$ を得る。すなわち *(O1)* は $f(t,\omega)$ の *Ogawa* 積分が *CONS* の選び方に依らないこと（u-可積分性）を保証する。

注意 2. $\alpha(t)=1_{[0,s]}(t)$ とすると

$$\int_0^s f(t,\omega)d_\psi W_t = \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^1 f(t,\omega)\overline{\chi_\ell(t)}dt\int_0^s \chi_\ell(t)dW_t$$

(iii) Ogawa 積分の２次共変分. ランダム関数 $g(t,\omega)$ と CONS $\{\eta_n(t), n\in\mathbb{N}\}$, $\{\chi_n(t), n\in\mathbb{N}\}$ に対し次を仮定する。

(O1') $\exists\{\mu_n\}$ s.t. $\mu_n>0$, $\sum\mu_n<\infty$, $\displaystyle E\sum\frac{1}{\mu_n}\left|\int_0^1 g(t,\omega)\overline{\eta_n(t)}dt\right|^2<\infty$

(O4) $\sup_n\sup_{t\in[0,1]}|\chi_n(t)|=M<\infty$

$\Delta_n=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}$ とおく。

命題 2. *(O1), (O1'), (O4),* $\sum_n|\Delta_n|<\infty$ の下で

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0}\sum_{\Delta_n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,\omega)d_\chi W_s\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s,\omega)d_\eta W_s = \int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)ds$$

が *almost sure* 収束の意味で成り立つ。

(iv) SFC と H^1 基底による Ogawa 積分の表現.

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_0^1 f(t,\omega)\overline{\varphi_n(t)}d_\psi W_t$$

で SFC を定義する。（次の命題 3 の仮定の下で well-defined である）

命題 3. *(O1), (O3), (O4)* の下で，任意の $t\in[0,1]$ *(fixed)* に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}_n(\omega)\int_0^t\varphi_n(s)ds = \int_0^t f(s,\omega)d_\psi W_s \quad \textit{in } L^1(dP)$$

が成り立つ。

(v) $f(t,\omega)$ の再構成.

定理 1. $f(t,\omega)$ の値域が $\{z=x+iy : y>0\}\cup\{x+i0 : x\geq 0\}$ に含まれるとする。*(O1), (O3), (O4)* の下で $f(t,\omega)$ は $\{\psi_n(t)\}$-*Ogawa* 積分による *SFCs* から強い意味で復元される。

定理 2. *(O1), (O3), (O4)* の下で $f(t,\omega)$ は $\{\psi_n(t)\}$-*Ogawa* 積分による *SFCs* から広い意味で復元される。

ゲーム理論から見た非加法的測度：若干のコメント

河野 敬雄 (Norio KÔNO)

1. ゲーム理論について

本発表でいう「ゲーム理論」とはいわゆる「協力ゲーム理論」のことである．私の理解に従えば,「ゲーム理論」という場合，ノイマンに始まる協力ゲーム理論とナッシュに始まる非協力ゲーム理論とに大別される．協力ゲーム理論はさらに譲渡可能な協力ゲーム理論 (Transferable utility game, TU game あるいは side payment のある提携形ゲーム) とそうでない協力ゲーム理論 (Non Transferable utility game, NTU game) とにわかれる．TU game はプレイヤーの集合 N(有限集合) と N の部分集合の全体 2^N 上で定義された実数値関数 v で表現される．v は特性関数と呼ばれる．以下，特性関数形ゲーム (N, v) という．通常，特性関数形ゲームで要求される仮定は

(1) $v(\emptyset) = 0$,   (2) $\forall S, T \in 2^N \ s.t. \ S \cap T = \emptyset \, ; \, v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ (supper additivity)

の 2 つである．さらに，ノイマン・モルゲンシュテルン (1944) ではいわゆるゼロサムゲームであること,

(3) $\forall S \in 2^N \, ; \, v(S) + v(S^c) = 0$

を仮定している．

従って，上記の (1),(2),(3) を仮定すると，(4) 非負性 $v(S) \geq 0$ は仮定できない．しかし，(1) と (2) の優加法性と (4) の非負性から (5) 単調性 $S \subset T \Longrightarrow v(S) \leq v(T)$ が従う．私見だが (3) のゼロサム性は本質的な仮定ではないと思われるので以後は (1) と (5) のみを仮定したい．

ところで，協力ゲーム理論における基本概念を幾つか紹介しておく．有限集合 A の要素の数を $\sharp A$ で表す．

· 提携（結託 coalition）: 2^N の要素，つまりプレイヤーの部分集合のこと．

· 配分（imputaion）: $\sharp N$ 次元ベクトル $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{\sharp N})$ のこと．

協力ゲーム理論は何を研究対象にするのだろうか？簡単にいうと一定の合理性の仮定（個人合理性，全体合理性）のもとに一定の条件を満たす配分を求めること．解概念 (solution concept) という．解概念としては，安定集合，コア，仁，等いろいろあり，優劣は付けがたい．存在，一意性も保証されない．

· シャープレイ値 : Shapley(1953) によって導入された．(N, v) に対して一意に定義される「配分」のこと．

ノイマン・モルゲンシュテルンの協力ゲーム (N, v) ではゼロサムを仮定するから当然 v の非負性は仮定できない．しかし，simple game（単純ゲーム，または投票ゲーム）と言われる 0 と 1 にしか値を採らない文字通りシンプルなゲームは本発表で議論する非加法的測度の最も単純な例なのでもう少し詳しく紹介する (鈴木・武藤:1985. 『協力ゲームの理論』東京大学出版会, 第 8 章)．単純ゲームは勝利提携の全体 $\mathcal{W} \equiv \{A \in 2^N \, ; \, v(A) = 1\}$ あるいは敗北提携の全体 $\mathcal{L} \equiv \{A \in 2^N \, ; \, v(A) = 0\}$ によって完全に特徴づけられる．さらに，$\mathcal{W}, \mathcal{L}$ を用いて,「妨害提携」,「最小勝利提携」,「拒否権」,「独裁者」，単純ゲーム固有の性質（分類）として,「プロパー」,「強い」,「弱い」単純ゲーム等が定義される．さらに単純ゲームの範囲内でゲームの合成，和，積が定義出来る．これらの概念，性質はプレイヤー集合が無限集合

であっても殆どの場合定義でき，かつ，非加法的測度の最もシンプルな例となっている．

2. 非加法的測度

本発表では河邊 (2016, 非加法的測度と非線形積分.『数学』68 巻 3 号, 266-292) に従って，非加法的測度を次のように定義する．

定義 2.1. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．ここで，X は空でない抽象集合，$\mathcal{F}$ は各点 $x \in X$ を含む σ-algebra とする．このとき，次の 3 つの条件を満たす $\mathcal{F}$ 上で定義された関数を**非加法的測度**と呼び，$(X, \mathcal{F}, v)$ と表記する．

(1-1) $v : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$（非負性）
(1-2) $v(\emptyset) = 0$ （下方有界性）
(1-3) $\forall A, B : A \subset B \Longrightarrow v(A) \leq v(B)$ （単調性）

しかしながら，定義の条件をこのように緩めてしまうと，広いクラスの非加法的測度一般に対して成立する深い内容の定理を得ることが難しくなる．さらなる付加的条件を課す必要性が生じる．河邊 (*ibid.*) には非加法的測度を特徴づける 30 以上の概念が列挙されている．その場合，当然それらの概念の相互関係，同値であるか，独立な概念であるか，包含関係にあるのか，等が問題になる．それらの関係性を理解する最も手っ取り早い方法は具体的な例を示すことである．

本発表の目的は，非加法的測度一般をいきなり考察するのは「しんどい」ので，まず手がかりとして協力ゲーム理論ではよく知られている単純ゲームの一般化である**単純非加法的測度**を定義して，いくつかの例を紹介することである．協力ゲーム理論で知られている概念や定理がどこまで非加法的測度の研究に有効であるかは今後の課題としたい．

定義 2.2. 次の条件を満たす非加法的測度 $(X, \mathcal{F}, v)$ を単純非加法的測度という．

$$\forall A \in \mathcal{F},\ v(A) = 0 \text{ or } 1.$$

値が 0 と 1 しか取らない加法的測度は単位分布しかないが単純ゲームを例として考えただけでも単純非加法的測度は驚くほどの多様性を持っていることがわかる．

プレイヤーの数（以下，プレイヤーの集合＝可測空間 X である）が無限集合の場合に重要となる概念のひとつに連続性の問題がある．N は自然数の集合，A_n は $\mathcal{F}$ に属する集合の列 $n \in N$ とする．

(1) 順序連続性：$\forall A_n \downarrow \emptyset \Longrightarrow v(A_n) \downarrow 0.$
(2) 強順序連続性：$\forall A, A_n \downarrow A, v(A) = 0 \Longrightarrow v(A_n) \downarrow 0.$
(3) 上からの連続性：$\forall A, A_n \downarrow A \Longrightarrow v(A_n) \downarrow v(A).$

河邊では定義されていないが，非加法的測度では $v(A) + v(A^c) = v(X)$ が成り立つとは限らないから下からの連続性も細かく分類する必要がある．これらの概念は単純非加法的測度の範囲でも例を作ることができる．さらに単純非加法的測度の合成，和，積についても紹介する．

文献： Grabisch, M., 2016. *Set Functions, Games and Capacities in Decision Making.* Theory and Decision Library C. Game Theory, Social Choice, Decision Theory, and Optimization Volmume 46. Springer.

Existence and uniqueness results for one type of first order conservation laws involving a Q-Brownian motion

by

Yueyuan Gao (MathAM-OIL, AIST c/o AIMR, Tohoku University, Japan)

Abstract :

We consider a first order conservation law with a multiplicative source term involving a Q-Brownian motion. We first present the result that the discrete solution obtained by a finite volume method converges along a subsequence in the sense of Young measures to a measure-valued entropy solution as the maximum diameter of the volume elements and the time step tend to zero. This convergence result yields the existence of a measure-valued entropy solution.

We then prove the uniqueness of the measure-valued entropy solution. We present the Kato inequality and as a corollary we deduce the uniqueness result. The Kato inequality is proved by a doubling of variables method; to that purpose, we prove the existence and the uniqueness of the weak solution of an associated nonlinear parabolic problem.

In the proof of the associated nonlinear parabolic problem, we apply an implicit time discretization to obtain a semi-discrete solution and prove the convergence of the discrete solution by using Itô's formula and a priori estimates. The convergence result yields the existence of a weak solution and we then prove the uniqueness of the weak solution.

Finally we show some numerical results for stochastic Burgers equation.

This is joint work with Tadahisa Funaki and Danielle Hilhorst.

A RELATION BETWEEN MODELED DISTRIBUTIONS AND PARACONTROLLED DISTRIBUTIONS

MASATO HOSHINO (WASEDA UNIVERSITY)

In the field of singular SPDEs, there are two big theories: the theory of *regularity structures* [4] by Hairer and the *paracontrolled calculus* [2] by Gubinelli, Imkeller and Perkowski. These two theories are based on a common principle but composed of different mathematical tools. Therefore we can use either of them according to the situation. For example, the former is useful to show a universal property of a large number of SPDEs (e.g. [5, 6]), and the latter is useful to get more detailed information of a specific SPDE (e.g. [3, 7]). However, there is a gap between the two theories about the range of application. For example, the Hairer's theory can be applied to the 3-dimensional parabolic Anderson model

$$(\partial_t - \Delta)u(t,x) = u(t,x)\xi(x), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{T}^3,$$

for $\xi \in \mathcal{C}^{-3/2-\epsilon}(\mathbb{T}^3)$ with $\epsilon > 0$, but the GIP theory cannot be.

In this talk, we discuss how to overcome this gap. Recently, Bailleul and Bernicot [1] are tying to improve the GIP theory. Our plan is to complete their work by combining the essence of the Hairer's theory. There is a difference between both theories about the definition of solutions. In the Hairer's theory, the solution is defined as a *modeled distribution*, which represents a local behavior of the solution. In the GIP theory, the solution is defined as a *paracontrolled distribution*, which is defined by nonlocal operators. Each definition has an advantage to each other. We compare these two notions and aim to find a better way.

References

[1] I. Bailleul and F. Bernicot, *Higher order paracontrolled calculus*, arXiv: 1609.06966.

[2] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski, *Paracontrolled distributions and singular PDEs*, Forum Math. Pi **3** (2015), e6, 75pp.

[3] M. Gubinelli and N. Perkowski, *KPZ reloaded*, Comm. Math. Phys. **349** (2017), no. 1, 165-269.

[4] M. Hairer, *A theory of regularity structures*, Invent. Math. **198** (2014), no. 2, 269-504.

[5] M. Hairer and J. Mattingly, *The strong Feller property for singular stochastic PDEs*, arXiv: 1610.03415.

[6] M. Hairer and J. Quastel, *A class of growth models rescaling to KPZ*, arXiv: 1512.07845.

[7] J.-C. Mourrat and H. Weber, *The dynamic Φ^4_3 model comes down from infinity*, arXiv: 1601.01234.

On the Gibbs equilibrium in stochastic complex Ginzburg-Landau equations

Reika Fukuizumi
Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University, Japan

Abstract
In Physics, the stochastic Gross-Pitaevskii equation is used as a model to describe Bose-Einstein condensation at positive temperature. The equation is in fact a complex Ginzburg-Landau equation with a trapping potential and an additive space-time white noise. I am going to talk about two important questions and corresponding our results for this system: the global existence of solutions in the support of the Gibbs measure, and the convergence of those solutions to the equilibrium for large time. This is a joint work with A. de Bouard (Ecole Polytechnique) and A. Debussche (ENS Rennes).

References
[1] M. Barton-Smith, “Invariant measure for the stochastic Ginzburg Landau equation,” Nonlinear differ. equ. appl. **11** (2004) 29-52.
[2] N. Burq, L. Thomann and N. Tzvetkov, “Long time dynamics for the one dimensional nonlinear Schrödinger equation,” Ann. Inst. Fourier(Grenoble). **63** (2013) no.6, 2137-2198.
[3] E.A. Carlen, J. Fröhlich and J. Lebowitz,
“Exponential relaxation to equilibrium for a one-dimensional focusing non-linear Schrödinger equation with noise, Commun. Math. Phys. **342** (2016) 303-332.

The invariant measure and flow associated to the Φ^4_3-quantum field model

Seiichiro Kusuoka
(Research Institute for Interdisciplinary Science, Okayama University)

We consider the invariant measure and flow for the stochastic quantization equation associated to the Φ^4_3-model on the torus, which appears in quantum field theory. By virtue of Hairer's breakthrough, such nonlinear stochastic partial differential equations became solvable and are intensively studied now. In this talk, we present a direct construction to both a global solution and an invariant measure for this equation.

Let $m_0 > 0$, Λ be the 3-dimensional torus i.e. $\Lambda = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3$, and μ_0 be the centered Gaussian measure on the space of Schwartz distributions $\mathcal{S}'(\Lambda)$ with the covariance operator $[2(-\triangle+m_0^2)]^{-1}$. We remark that μ_0 is different from the Nelson's Euclidean free field measure by the scaling $\sqrt{2}$. In order to adjust our setting to those of known results, we define μ_0 as above. In the constructive quantum field theory, there was a problem to construct a measure

$$\mu(d\phi) = Z^{-1} \exp\left(-U(\phi)\right) \mu_0(d\phi)$$

where

$$U(\phi) = \int_\Lambda \left(\frac{\lambda}{4}\phi(x)^4 - C_\lambda \phi(x)^2 \right) dx,$$

$\lambda > 0$ and Z is the normalizing constant. Since the support of μ_0 is in the space of tempered distributions, ϕ^4 and ϕ^2 are not defined in usual sense. So, we approximate ϕ and take the limit.

Let $\langle f, g\rangle$ be the inner product on $L^2(\Lambda;\mathbb{C})$. For $k \in \mathbb{Z}^d$, define $e_k(x) := e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot x}$ where $k \cdot x := k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$. For $N \in \mathbb{N}$, denote $\{j \in \mathbb{Z}; |j| \le N\}$ by $\mathbb{Z}_N$, and let P_N be the mapping from $\mathcal{S}'(\Lambda)$ to $L^2(\Lambda;\mathbb{C})$ given by

$$P_N\phi := \sum_{k\in\mathbb{Z}_N^3} \langle \phi, e_k\rangle e_k.$$

Define a function U_N on $\mathcal{S}'(\Lambda)$ by

$$U_N(\phi) = \int_\Lambda \left\{ \frac{\lambda}{4}(P_N\phi)(x)^4 - \frac{3\lambda}{2}\left(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(N)}\right)(P_N\phi)(x)^2 \right\} dx$$

where

$$C_1^{(N)} = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}_N^3} \frac{1}{k^2+m_0^2}, \quad C_2^{(N)} = \frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2\in\mathbb{Z}_N^3} \frac{1}{(l_1^2+m_0^2)(l_2^2+m_0^2)(l_1^2+l_2^2+(l_1+l_2)^2+3m_0^2)}.$$

We remark that $\lim_{N\to\infty} C_1^{(N)} = \lim_{N\to\infty} C_2^{(N)} = \infty$, and $C_1^{(N)}$ and $C_2^{(N)}$ are called renormalization constants. Consider the probability measure μ_N on $\mathcal{S}'(\Lambda)$ given by

$$\mu_N(d\phi) = Z_N^{-1} \exp\left(-U_N(\phi)\right) \mu_0(d\phi)$$

where Z_N is the normalizing constant. We remark that $\{\mu_N\}$ is the approximation sequence of the Φ^4_3-measure which will be constructed below as the invariant measure of the associated flow.

Now we consider the stochastic quantization equation associated to $\{\mu_N\}$ as follows.

$$\begin{cases} d\tilde{X}^N_t(x) &= dW_t(x) - (-\triangle + m_0^2)\tilde{X}^N_t(x)dt \\ &\quad -\lambda\left\{P_N[(P_N\tilde{X}^N_t)^3](x) - 3\left(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(N)}\right)P_N\tilde{X}^N_t(x)\right\}dt \\ \tilde{X}^N_0(x) &= \xi_N(x) \end{cases}$$

where $W_t(x)$ is a white noise with parameter $(t,x) \in [0,\infty) \times \Lambda$ and $\xi_N(x)$ is a random variable which has μ_N as the law, and independent of W_t. We remark that μ_N is the invariant measure with respect to the semigroup generated by the solution to the equation. Let $X^N := P_N\tilde{X}^N$ for $N \in \mathbb{N}$. Then, X^N satisfies the stochastic partial differential equation

$$\begin{cases} dX^N_t(x) &= P_N dW_t(x) - (-\triangle + m_0^2)X^N_t(x)dt \\ &\quad -\lambda\left\{P_N[(X^N_t)^3](x) - 3(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(N)})X^N_t(x)\right\}dt \\ X^N_0(x) &= P_N\xi_N(x) \end{cases} \tag{1}$$

To apply the Hairer's reconstruction method, which enables us to transform (1) for a solvable partial differential equation, we supplementary introduce the infinite-dimensional Ornstein-Uhlenbeck process Z as follows. Let Z be the solution to the stochastic partial differential equation on Λ

$$\begin{cases} dZ_t(x) &= dW_t(x) - (-\triangle + m_0^2)Z_t(x)dt, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \Lambda \\ Z_0(x) &= \zeta(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \in \Lambda \end{cases}$$

where ζ is a random variable which has μ_0 as its law and is independent of W_t and ξ_N. Let $X^{N,(2)}_t := X^N_t - \mathcal{Z}^{(1,N)}_t + \lambda\mathcal{Z}^{(0,3,N)}_t$ for $t \in [0,\infty)$ where

$$\mathcal{Z}^{(0,3,N)}_t := \int_0^t e^{(t-s)(\triangle - m_0^2)}\left(P_N(P_N Z_s)^3 - 3C_1^N P_N Z_s\right)ds, \quad t \in [0,\infty),$$

and decompose $X^{N,(2)}$ into $X^{N,(2),<}$ and $X^{N,(2),\geqslant}$ by means of paraproduct. Then, we have a solvable, coupled, semilinear and dissipative parabolic partial differential equation, which the pair $(X^{N,(2),<}, X^{N,(2),\geqslant})$ satisfies. By applying the technique of the semilinear and dissipative parabolic equation, we obtain some estimates for $X^{N,(2),<}$ and $X^{N,(2),\geqslant}$, which yields the tightness of $X^{N,(2)}$. As the result we obtain the following theorem for the Φ^4_3-measure and the associated flow.

Theorem 1. *For $\varepsilon \in (0,1]$ sufficiently small, $\{X^N\}$ is tight on $C([0,\infty); B^{-1/2-\varepsilon}_{4/3})$, where $B^s_{p,r}$ is the Besov space. Moreover, if X is a limit of a subsequence $\{X^{N(k)}\}$ of $\{X^N\}$ on $C([0,\infty); B^{-1/2-\varepsilon}_{4/3})$, then X is a continuous Markov process on $B^{-1/2-\varepsilon}_{4/3}$, the limit measure μ of the associated subsequence $\{\mu_{N(k)}\}$ is an invariant measure with respect to X and it holds that*

$$\int \|\phi\|^4_{B_4^{-1/2-\varepsilon}}\mu(d\phi) < \infty.$$

磁場のある調和振動子鎖モデルにおける熱の異常拡散について

須田 颯 (東京大学大学院数理科学研究科)

2017 年 12 月 14 日

本研究は佐々田 槙子氏 (東京大学大学院数理科学研究科)、齊藤 圭司氏 (慶應義塾大学理工学部物理学科) との共同研究である。

本公演では、1 次元振動子鎖モデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q(x,t) & = p(x,t) \\ \frac{d}{dt}p(x,t) & = V'(q(x)-q(x+1)) - V'(q(x-1)-q(x)),\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

における熱の巨視的挙動について考察する。Fermi-Pasta-Ulam Chain($V(y) = \frac{1}{2}y^2 + a_1 y^3 + a_2 y^4$) に代表される 1 次元非調和振動子鎖モデルでは熱の異常拡散現象が生じていると統計物理の立場から古くより主張されてきた。(しかし、それが数学的に厳密な手法で導かれた結果はまだない。) このような熱の異常拡散には時間発展で系全体の運動量が保存されること

$$\mathcal{A}\sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x) = 0$$
$$\mathcal{A} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x)\partial_{q(x)} + (V'(q(x)-q(x+1)) - V'(q(x-1)-q(x)))\partial_{p(x)}$$

が本質的な条件であろうと考えられてきた。近年では、非調和鎖の相互作用における非線形効果を、系全体の熱及び運動量を保存するような確率的摂動を加えることで近似したモデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q(x,t) & = p(x,t) \\ \frac{d}{dt}p(x,t) & = (\Delta q)(x,t) + Noise \end{cases}$$

が解析され、様々な結果が導かれている ([1],[2],[3])。特に [3] では、巨視的な熱の時間発展は 3/4-分数階拡散方程式

$$\partial_t \mathbf{e}(u,t) = -(-\Delta)_u^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(u,t),\ (u,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$$

に従う、つまり巨視的な熱の異常拡散が確率鎖モデルに対して示されている。

本研究では、[4] により導入された 2 次元中の 1 次元鎖に磁場及び系全体の運動量を保存する確率的摂動を加えたモデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_i(x,t) & = p_i(x,t) \\ \frac{d}{dt}p_i(x,t) & = (\Delta q_i)(x,t) + B\delta_{i,2}p_1(x) - B\delta_{i,1}p_2(x) + noise,\ i = 1,2 \end{cases}$$

を解析する。このような微視的モデルから空間-時間-ノイズに対するスケール極限を取ることで、中間視的 (mesoscopic) な熱の時間発展を表す方程式として線形ボルツマン方程式

$$\partial_t W(t,x,k,i) + \partial_k X'(k)\partial_x W(t,x,k,i) = CW(t,x,k,i),\ (t,x,k,i) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \{1,2\}$$
$$CW(t,x,k,i) = \sum_{j=1,2} \int_{\mathbf{T}} dk' \frac{X_i}{X_1 + X_2}(k) R(k,k') \frac{X_j}{X_1 + X_2}(k')(W(t,x,k',j) - W(t,x,k,i))$$

が導出される。$\mathbb{T}$ は一次元トーラス、$k \in \mathbb{T}$ は熱のフーリエモードである。更にこのボルツマン方程式の解に対して空間-時間に対するスケール極限を取ることで、その解は 5/6-分数階拡散方程式

$$\partial_t \mathbf{e}(u,t) = -(-\Delta)_u^{\frac{5}{6}} \mathbf{e}(u,t),\ (u,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

の解に収束することを示した。[4] の結果によってこのモデルでは熱の異常拡散が生じるであろうと予測されていたが、今回それを証明したことになる。特筆すべきこととしては、5/6 という新しい指数が得られたこと、磁場確率鎖モデルは磁場の効果により系全体の運動量を保存していないことがある。従って本研究は運動量保存と熱の異常拡散に関する仮説の非自明な反例にもなっている。

参考文献

[1] G. Basile, C. Bernardin, S. Olla : *Thermal Conductivity for a Momentum Conservative Model*. Comm. Math. Phys. **287**, 67-98 (2009)

[2] G. Basile, S. Olla, H. Spohn : *Energy transport in stochastically perturbed lattice dynamics*. Arch. Ration. Mech. **195**, 171–203 (2009)

[3] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *Superdiffusion of Energy in a Chain of Harmonic Oscillators with Noise*. Commun. Math. Phys. **339**, 407–453 (2015)

[4] K. Saito, M. Sasada : *Thermal conductivity for a stochastic dynamics in a magnetic field*

Characterization of the explosion time for the Komatu–Loewner evolution

Takuya Murayama (Kyoto University)

1 Introduction

The Komatu–Loewner equation is a correspondence to the Loewner equation in multiply connected domains. Bauer and Friedrich [1] established its concrete expression in standard slit domains of the upper half plane $\mathbb{H}$, and then, Chen, Fukushima et al. [2], [3], [4] investigated some properties of the Komatu–Loewner evolution generated by it.

In this talk, I shall give a behavior of the image domain at the explosion time of this evolution, which is a refinement of a part of the study in [1]. The proof is based on a probabilistic expression of the solution that was developed in [2], [3] and [4], together with a general theory of complex analysis.

2 Review on the Komatu–Loewner equation

We fix $N \in \mathbb{N}$. Let $C_j \subset \mathbb{H}$, $1 \leq j \leq N$, be horizontal slits (i.e., segments parallel to the real axis) and $K := \bigcup_{j=1}^{N} C_j$. We call a domain of the form $\mathbb{H} \setminus K$ a *standard slit domain*.

Take a simple curve $\gamma : [0, t_\gamma) \to \overline{D}$ satisfying $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$ and $\gamma(0, t_\gamma) \subset D$. For each $t \in [0, t_\gamma)$, there is a unique conformal map g_t from D onto another standard slit domain D_t with the *hydrodynamic normalization*

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \quad z \to \infty,$$

for some $a_t \geq 0$. The image $\xi(t) := g_t(\gamma(t))(= \lim_{z\to\gamma(t)} g_t(z)) \in \partial\mathbb{H}$ of the terminal point $\gamma(t)$ is called the *driving function* of g_t. The quantity a_t, called the *half plane capacity* of the set $\gamma[0,t]$ relative to g_t, is strictly increasing and continuous in t. Thus we can reparametrize the curve γ in such a way that $a_t = 2t$. Under these settings, $g_t(z)$ satisfies the following *Komatu–Loewner equation*:

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = -2\pi \Psi_{D_t}(g_t(z), \xi(t)), \quad g_0(z) = z \in D. \tag{1}$$

The function $\Psi_{D'}(\cdot, \xi_0)$, $\xi_0 \in \partial\mathbb{H}$, is a unique conformal map from D onto another slit domain $\tilde{D}$ with ∞ mapped to 0 and $\Psi_{D'}(z, \xi_0) \sim -\pi^{-1}(z - \xi_0)^{-1}$ as $z \to \xi_0$.

Since $\Psi_{\mathbb{H}}(z, \xi_0) = -\pi^{-1}(z - \xi_0)^{-1}$, the celebrated Loewner equation

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)}, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H},$$

corresponds to the Komatu–Loewner equation in $D = \mathbb{H}$.

Since the image D_t of g_t above changes as time passes, there is also an ODE describing the motion of the slits $C_{j,t}$ of D_t. We denote the left and right endpoints of $C_{j,t}$ by $z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$ and $z_j^r(t) = x_j^r(t) + iy_j(t)$, respectively. Then, they satisfy the *Komatu–Loewner equation for slits*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y_j(t) &= -2\pi \Im \Psi_{D_t}(z_j(t), \xi(t)), \\
\frac{d}{dt} x_j(t) &= -2\pi \Re \Psi_{D_t}(z_j(t), \xi(t)), \\
\frac{d}{dt} x_j^r(t) &= -2\pi \Re \Psi_{D_t}(z_j^r(t), \xi(t)).
\end{aligned} \tag{2}$$

We now follow this procedure in the opposite direction. Namely, for a continuous function $\xi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, we first solve the Komatu–Loewner equation (2) for slits. By doing so, the family $\{D_t\}$ are determined, and then we can solve (1) for $g_t(z)$, $z \in D$.

We denote by t_ξ the explosion time for the ODE (2).

$$t_z = t_\xi \wedge \sup\{t > 0; |g_t(z) - \xi(t)| > 0\}, \quad z \in D,$$

is the explosion time of $g_t(z)$. Putting $F_t := \{z \in D; t_z \le t\}$, $t < t_\xi$, we can check that g_t, $t \in [0, t_\xi)$, is a unique conformal map from $D \setminus F_t$ onto D_t satisfying the hydrodynamic normalization with $a_t = 2t$.

The bounded set F_t is not necessarily a curve but a (compact) $\mathbb{H}$-*hull* in the sense that $F_t = \mathbb{H} \cap \overline{F_t}$ and that $\mathbb{H} \setminus F_t$ is simply connected. We call both g_t and F_t the *Komatu–Loewner evolution driven by* ξ.

3 Characterization of the explosion time

It is a natural problem what happens if t_ξ is finite. A reasonable guess is that the evolution F_t should hit the slits $\bigcup_j C_j$ at the time t_ξ. In terms of the slits $C_{j,t}$ of D_t, this means that $C_{j,t}$ is absorbed into the real axis for some j as claimed in [1, Theorem 4.1].

Justifying this description is, however, not so trivial. The endpoints $z_j(t)$ and $z_j^r(t)$ of the slits $C_{j,t}$ is merely the solution to the ODE (2), so, for some j, $C_{j,t}$ may degenerate to one point or collide with each other before reaching $\partial\mathbb{H}$.

Our main theorem settles this problem as follows:

Theorem 1. *If $t_\xi < \infty$, then*

$$\lim_{t \nearrow t_\xi} \min_{1 \le j \le N} \operatorname{dist}(C_{j,t}, \xi(t)) = 0. \tag{3}$$

The conclusion (3) obviously implies $\lim_{t \nearrow t_\xi} y_j(t) = 0$ for some j, which is exactly the observation by [1].

For the proof, we assume that the conclusion does not hold. It suffices to extend the solution $z_j(t)$ and $z_j^r(t)$ beyond t_ξ so that the corresponding $\{C_{j,t}\}$ still represent N disjoint slits in $\mathbb{H}$. To this end, we interpret the complicated evolution g_t and F_t in D as a simpler one g_t^0 and F_t in $\mathbb{H}$, which is the method essential in [4]. g_t^0 and F_t extend to a Loewner evolution in $\mathbb{H}$ over the time interval $[0, t_\xi]$. Then, by a version of Carathéodory's kernel theorem (cf. [5, Theorem 15.4.7]), $\{g_t \circ (g_t^0)^{-1}; t < t_\xi\}$ extends to a family of conformal maps over $[0, t_\xi]$. This implies that the limits $z_j(t_\xi)$ and $z_j^r(t_\xi)$ still represent N slits in $\mathbb{H}$. We are thus led to a contradiction.

If time permits, I shall also explain the finite time explosion of the *stochastic Komatu–Loewner evolution* (SKLE) for specific parameters.

We define the *domain constant* k as

$$k(D, \xi_0) := 2\pi \lim_{z \to \xi_0} \left(\Psi_D(z, \xi_0) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{z - \xi_0} \right), \quad \xi_0 \in \partial\mathbb{H}.$$

$\mathrm{SKLE}_{\sqrt{6},k}$ is a Komatu–Loewner evolution driven by the random function ξ determined by the system of SDEs (2) and

$$d\xi(t) = -k(D_t, \xi(t))dt + \sqrt{6}dB_t \tag{4}$$

where B_t is a one-dimensional standard Brownian motion.

Proposition 2. *Let ζ be the explosion time for the SDEs* (2) *and* (4)*. It holds that $\zeta < \infty$ almost surely.*

Proposition 2 is proven by interpreting SLE_6 as $\mathrm{SKLE}_{\sqrt{6},k}$ similarly to the proof of Theorem 1.

References

[1] R. O. Bauer and R. M. Friedrich, On chordal and bilateral SLE in multiply connected domains, Math. Z. **258** (2008), 241–265.

[2] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, Stochastic Komatu–Loewner evolutions and BMD domain constant, to appear in Stoch. Proc. Appl., arXiv:1410.8257v2.

[3] Z.-Q. Chen, M. Fukushima and S. Rohde, Chordal Komatu–Loewner equation and Brownian motion with darning in multiply connected domains, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 4065–4114.

[4] Z.-Q. Chen, M. Fukushima and H. Suzuki, Stochastic Komatu–Loewner evolutions and SLEs, Stoch. Proc. Appl. **127** (2017), 2068–2087.

[5] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable II, Graduate Texts in Mathematics, vol. 159, Springer-Verlag, New York, 1995.

Loewner-Kufarev 方程式の連続率について

天羽 隆史[♭](福岡大学)

原点を含み、連続的に増大していく複素平面内の単連結領域の族は C. Loewner, P. P. Kufarev そして C. Pommerenke による理論の整備を経て、対応する Riemann 写像 (の逆写像) が Loewner(-Kufarev) 方程式と呼ばれる偏微分方程式によって記述されることが知られている。この考え方は I. Markina と A. Vasil'ev によって、必ずしも単調増大とは限らない単連結領域の族の発展を記述する alternate Loewner-Kufarev 方程式へと拡張された。今回の講演ではそれをさらに拡張する形で、無限個の道を駆動関数に持つような制御型の Loewner-Kufarev 方程式を導入する。このとき、この解の時間に関する連続率が記述し易い駆動関数のクラスを一つ紹介する。

本講演は Roland Friedrich 氏 (Saarland university) との共同研究に基づく。

E-mail address: (T. Amaba) `fmamaba@fukuoka-u.ac.jp`

[♭]This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15K17562.

Radial processes on $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ spaces

Kazumasa Kuwada and Kazuhiro Kuwae
(Tohoku University and Fukuoka University)

1 $\mathsf{RCD}^*(K,N)$-space

Let $\mathcal{C}^{\mathrm{Lip}}(X)$ be the set of Lipschitz functions on X. Let $\mathsf{Ch}: L^2(X;\mathfrak{m}) \to [0,\infty]$ be given by

$$\begin{aligned}\mathsf{Ch}(f) :=& \frac{1}{2}\inf\left\{ \varliminf_{n\to\infty}\int_X |Df_n|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \;\middle|\; f_n \in \mathcal{C}^{\mathrm{Lip}}(X)\cap L^2(X;\mathfrak{m}), f_n \to f \text{ in } L^2(X;\mathfrak{m})\right\},\\ \mathcal{D}(\mathsf{Ch}) :=& \{f\in L^2(X;\mathfrak{m}) \mid \mathsf{Ch}(f)<\infty\},\end{aligned}$$

where $|Dg|: X\to[0,\infty]$ is local Lipschitz constant of $g: X\to\mathbb{R}$ defined by

$$|Dg|(x) := \varlimsup_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}.$$

For $f\in L^2(X;\mathfrak{m})$ with $\mathsf{Ch}(f)<\infty$, we have $|Df|_w \in L^2(X;\mathfrak{m})$ such that

$$\mathsf{Ch}(f) = \frac{1}{2}\int_X |Df|_w^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{1.1}$$

We call $|Df|_w$ minimal weak upper gradient of f. To state the precise definition of $|Df|_w$, we need some notions in optimal transport. We call $(X,d,\mathfrak{m})$ to be *infinitesimally Hilbertian*, if Ch satisfies the parallelogram law. Note that minimal weak upper gradients also satisfies the parallelogram law if $(X,d,\mathfrak{m})$ is infinitesimally Hilbertian. It means that there exists a bilinear form $\langle D\cdot, D\cdot\rangle : \mathcal{D}(\mathsf{Ch})\times\mathcal{D}(\mathsf{Ch})\to L^1(X;\mathfrak{m})$ such that $\langle Df, Df\rangle = |Df|_w^2$. We denote the (non-positive definite) selfadjoint operator associated with $2\mathsf{Ch}$ by Δ. Throughout my talk, we will assume $K\in\mathbb{R}$ and $N\in[1,\infty[$.

Definition 1.1 *We call that $(X,d,\mathfrak{m})$ is an $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ space if it satisfies the following conditions:*

(i) *$(X,d,\mathfrak{m})$ is infinitesimally Hilbertian.*

(ii) *There exists $x_0\in X$ and a constant $c,C>0$ such that $V_r(x_0)\le C\mathrm{e}^{cr^2}$.*

(iii) *If $f\in\mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ satisfies $|Df|_w\le 1$ $\mathfrak{m}$-a.e., then f has a 1-Lipschitz representative.*

(iv) *For any $f\in\mathcal{D}(\Delta)$ with $\Delta f\in\mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ and $g\in\mathcal{D}(\Delta)\cap L^\infty(X;\mathfrak{m})$ with $g\ge 0$ and $\Delta g\in L^\infty(X;\mathfrak{m})$,*

$$\frac{1}{2}\int_X |Df|^2\Delta g\,\mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_X\langle Df, D\Delta f\rangle g\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \ge K\int_X |Df|_w^2 g\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \frac{1}{N}\int_X(\Delta f)^2 g\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

2 Main Results

For $p \in X$, let the radial function $r_p : X \to \mathbb{R}$ be given by $r_p(x) := d(p, x)$. Let $\kappa := \frac{K}{N-1}$ if $N > 1$, $:= 0$ if $N = 1$, and $\mathfrak{s}_\kappa(t) := \sin(\sqrt{\kappa}t)/\sqrt{\kappa}$ and $\cot_\kappa(t) := (\log \mathfrak{s}_k(t))' = \mathfrak{s}_k'(t)/\mathfrak{s}_k(t)$. We interpret $\mathfrak{s}_0(t)$ as $\lim_{\kappa\to 0} \mathfrak{s}_\kappa(t)(= t)$.

Let $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{M}, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in X})$ with a filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ be the diffusion process canonically associated with $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Let σ_p be the first hitting time of $\mathbf{X}$ to $\{p\}$. Our main theorem is a stochastic expression of the radial process $r_p(X_t)$. A simplified version can be stated as follows:

Theorem 2.1 (Stochastic expression of radial process)

(i) *For the part process $\mathbf{X}_{X\setminus\{p\}}$ of $\mathbf{X}$ on $X \setminus \{p\}$, there exists a positive continuous additive functional A_t in the strict sense and a one-dimensional standard Brownian motion B such that*

$$r_p(X_t) - r_p(X_0) = \sqrt{2}B_t + (N-1)\int_0^t \cot_\kappa \circ r_p(X_s)\,\mathrm{d}s - A_t \tag{2.1}$$

holds for all $t \in [0, \sigma_p[$ $\mathbb{P}_x$-a.s. for all $x \in X \setminus \{p\}$.

(ii) *If the condition* (R2) *below is satisfied, then (i) holds for X in place of $X\setminus\{p\}$ and* (2.1) *holds for all $t \in [0, \infty[$ $\mathbb{P}_x$-a.s. for every $x \in X$. In particular, $f(r_p(X_t))$ is a semimartingale.*

Definition 2.2 *We say that $p \in X$ satisfies the condition* (R1) *if $r_p^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(X; \mathfrak{m})$. We say that $p \in X$ verifies the condition* (R2) *if there exist $\xi_0 > 0$ and $C_{\xi_0} > 0$ such that*

$$\frac{1}{\mathfrak{m}(B_\xi(p))}\int_{B_\xi(p)} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{r_p} \leq \frac{C_{\xi_0}}{\xi}$$

for any $\xi \in]0, \xi_0[$. Note that (R2) *immediately implies* (R1).

Lemma 2.3 *Suppose $N > 1$ and that there exists $C_V > 0$ and $\delta > 0$ such that $\mathfrak{m}(B_r(p)) \leq C_V r^N$ holds for $r \in [0, \delta[$. Then $p \in X$ satisfies the condition* (R2).

Note that this sufficient condition holds for any $p \in X$ on N-dimensional Alexandrov spaces equipped with N-dimensional Hausdorff measure with $N \geq 2$.

Assumption 1 $E_1 = \emptyset$.

Here E_1 is the 1-dimensional part of the $\mathsf{RCD}^*(K, N)$-space. If $E_1 \neq \emptyset$, then $X = E_1$ (see [2]).

Theorem 2.4 *Suppose Assumption 1. Then $\{p\}$ is polar for $\mathfrak{m}$-a.e. $p \in X$.*

Proposition 2.5 *Suppose Assumption 1. Then $\mathfrak{m}$-a.e. $p \in X$ satisfies* (R2).

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[2] Y. Kitabeppu and S. Lakzian, *Characterization of low dimensional RCD*(K, N) spaces*, Anal. Geom. Metr. Spaces **4** (2016), 187–215.

[3] K. Kuwada and K. Kuwae, *Radial processes on* $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ *spaces*, preprint, 2017.

Unimodality for stochastic processes in classical and free probability

確率論シンポジウム 2017
平成 29 年 12 月 11 日 (月)-12 月 15 日 (金)
東北大学片平キャンパスさくらホール

北海道大学大学院理学院 数学専攻
博士課程 1 年 植田 優基

本講演で話す研究内容は, 長谷部 高広氏 (北海道大学) との共同研究である ([3]). ここでは大まかに, 概念の定義と研究問題について解説する.

1 単峰性の定義

1 次元確率分布 μ がモード $c \in \mathbb{R}$ の単峰であるとは, μ が以下のように表示されることをいう.

$$\mu = \mu(\{c\})\delta_c + f(x)dx,$$

ただし $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は $(-\infty, 0)$ 上で単調非減少, $(0, \infty)$ 上で単調非増加な関数である. 値 $\mu(\{c\})$ は 0 となることもある. 分布の単峰性は, 分布の散布度, 歪度などの分布に現れる統計的特性を統計指標で要約するために必要な性質である.

2 1 次元ブラウン運動と 1 次元自由ブラウン運動の単峰性

ある確率空間上で定義された連続確率過程 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ が 1 次元 (古典) ブラウン運動であるとは,
(1) $B_0 = 0$, a.s.,
(2) 任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立,
(3) 任意の $0 \leq t < s$ に対し, $B_s - B_t$ は正規分布 $N(0, t-s)$ に従う.
をみたすことをいう. 定義からわかる通り, 1 次元ブラウン運動をなす分布族は正規分布族であり, 正規分布 $N(0, t)$ はすべての t でモード 0 の単峰分布となる. 従って 1 次元ブラウン運動は全ての時刻で単峰である.

同様に, ある (非可換) 確率空間上で定義された確率過程 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ が 1 次元自由ブラウン運動であるとは,
(1) $W_0 = 0$,
(2) 任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ は自由独立,
(3) 任意の $0 \leq t < s$ に対して, $W_s - W_t$ は分散 $s - t$ の標準ウィグナー半円分布 $S(0, t)$ に従う.
をみたすことをいう. ここで非可換確率空間とは, ある $\mathbb{C}$ 上 $*-$ 代数とその上の状態と呼ばれる線形汎関数の組を表しており, その $*-$ 代数の元の事を確率変数と呼ぶ. "自由独立" と "従う" の定義はここでは省略するが, いずれも非可換確率論の枠組みで定義されたもので, 確率論における "独立", "従う" の類似の概念となっていることに注意する. また分散 t の標準ウィグナーの半円分布とは以下のような連続密度関数をもつ確率分布のことである.

$$\frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2} \cdot 1_{[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1 次元自由ブラウン運動をなす分布族はウィグナーの半円分布族であり, $S(0, t)$ はすべての t でモード 0 でコンパクトサポートをもつ単峰分布となる. したがって自由ブラウン運動もまた全ての時刻で単峰であるといえる.

なおブラウン運動は安定過程, 自己分解可能過程, そしてレヴィ過程の代表的な例であり, より一般に安定過程, 自己分解可能過程, レヴィ過程の単峰性に関しては主に山里, 渡辺, Wolfe ([4], [5], [6]) らを中心に研究されてきた. 同様にこれらの自由版の単峰性についても, 主に長谷部, 佐久間, Thorbjørnsen ([1],[2]) らによって研究されてきた.

3　初期分布付き古典・自由ブラウン運動の単峰性についてと研究問題

ブラウン運動は古典の場合も自由の場合も, 確率過程を分布族としてみれば, その初期分布は 0 でのデルタ分布 δ_0 である．この初期分布をデルタ分布でない適当な確率分布 μ に変更する (ただし時刻 0 での確率変数は全ての B_t と独立, W_t と自由独立になるようにとる) ときに得られる確率過程をなす分布族は, 古典の場合では $\mu * N(0,t)$, 自由の場合では $\mu \boxplus S(0,t)$ である．ここで $*$ は分布のたたみこみ, $\boxplus$ は分布の自由たたみ込みを表す記号である．このとき, これらの初期分布付きブラウン運動の単峰性は初期分布 μ に依存しており, 一般にはすべての時刻で単峰ではなくなる．例えば $\mu = \frac{1}{2}\delta_{+1} * \frac{1}{2}\delta_{-1}$(対称ベルヌーイ分布) と取れれば, $\mu * N(0,t)$ は $t \geq 1$, $\mu \boxplus S(0,t)$ は $t \geq 4$ で単峰になる (自由の場合は Figure 1-6)．我々の問題点は, 初期分布がどのようなクラスであれば, これらの初期分布付き古典・自由ブラウン運動が
(1) すべての時刻で単峰になるか,
(2) 十分大な時刻で単峰になるか,
(3) すべての時刻で単峰にならないか,
について考察することであり, 本講演ではこの問題に対する研究結果について解説する予定である．

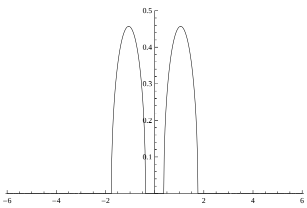


Figure 1: $\mu \boxplus S(0, 0.25)$

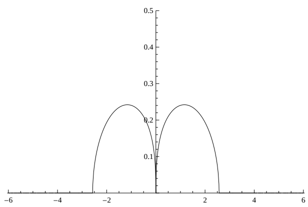


Figure 2: $\mu \boxplus S(0, 1)$

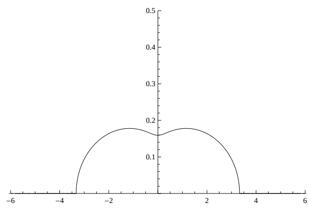


Figure 3: $\mu \boxplus S(0, 2)$

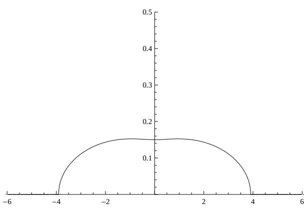


Figure 4: $\mu \boxplus S(0, 3)$

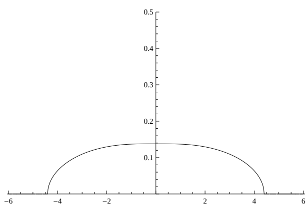


Figure 5: $\mu \boxplus S(0, 4)$

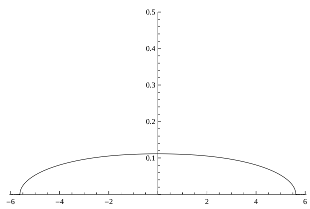


Figure 6: $\mu \boxplus S(0, 7)$

References

[1] T. Hasebe and N. Sakuma, Unimodality for free Lévy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **53** (2017), no. 2, 916–936.

[2] T. Hasebe and S. Thorbjørnsen, Unimodality of the freely selfdecomposable probability laws, J. Theoret. Probab. **29** (2016), no. 3, 922-940.

[3] T. Hasebe, Y. Ueda, Large time unimodality for classical and free Brownian motions with initial distributions, e-print, arXiv:1710.08240,

[4] T. Watanabe, On the strong unimodality of Lévy processes, Nagoya Math. J. Vol. **121** (1991), 195-199.

[5] S.J. Wolfe, On the unimodality of infinitely divisible distribution functions, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **45** (1978), 329-335.

[6] M. Yamazato, Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L, Ann. Probab. **6**, 523–531 (1978).

Approximation and duality problems about refracted processes

野場 啓 (京都大学大学院理学研究科)

1 序

X と Y を正の跳びを持たない標準過程とし, 正の値をとるとき X の, 負の値をとるとき Y の挙動をする確率過程 U のことを X と Y の**屈折過程**と呼ぶことにする. X と Y がいずれも Lévy 過程で X と Y の違いがドリフトのみの場合に, Kyprianou–Loeffen(2010) は屈折過程 U を, 確率微分方程式を用いて定義した. また, X と Y がいずれも正の跳びを持たない Lévy 過程で X と Y の Lévy 測度が異なり X がガウス部分を持たない場合について, Noba–Yano(arXiv, 2016) は屈折過程 U を周遊理論を用いて構成した. 本講演では一般の正の跳びを持たない標準過程 X と Y に対して, 屈折過程 U を**周遊理論**を用いて構成し, その性質を論じる.

X と Y を正の跳びを持たない Lévy 過程とし, U を周遊理論を用いて構成される屈折過程とする. このとき, 複合 Poisson 過程の列 $\{X^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{Y^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ から構成される屈折過程の列 $\{U^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で, U に分布の意味で収束するものを構成したい. Noba–Yano(arXiv, 2016) は, X がガウス部分を持たない場合について, 上記のような近似問題を論じた. 本講演では, X と Y を一般の正の跳びを持たない Lévy 過程とし, X と Y の接合部を関数で変化させる場合について, 近似問題を論じる.

X と Y を正の跳びを持たない標準過程で, それぞれ双対な過程 $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ を持つとする. $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ は負の跳びを持たない標準過程となるため, $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ から屈折過程 $\widehat{U}$ を構成することができる. このとき, U と $\widehat{U}$ が双対の関係にあることは明らかではない. 本講演では, U と $\widehat{U}$ が双対であるための, U と $\widehat{U}$ の必要十分条件について論じる. その際, **一般化スケール関数**を用いる.

正の跳びを持たない Lévy 過程に対しスケール関数が存在して, 到達時刻の Laplace 変換や吸収壁ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表わせることが知られている (詳しくは Kyprianou(2014) を見よ). 本講演では正の跳びを持たない Lévy 過程のスケール関数を, 正の跳びを持たない標準過程に拡張し, 一般化スケール関数と呼ぶことにする.

本講演は以下の二つの論文に基づいたものであり, 一般化スケール関数の定義, 屈折過程の構成, 屈折過程の近似問題, 屈折過程の双対問題について順に述べていく. 予稿では, 屈折過程の定義についてのみ述べる.

[1] K. Noba. Approximation and duality problems about refracted processes. In preparation.

[2] K. Noba. Generalized scale functions of standard processes with no positive jumps. In preparation.

2　屈折過程

$\mathbb{R}$ 値確率過程 Z と $x \in \mathbb{R}$ に対し, 以下のように到達時刻を定義する:

$$T_x^-(Z) := \inf\{t > 0 : Z_t \leq x\}, T_x(Z) := \inf\{t > 0 : Z_t = x\}. \tag{2.1}$$

考える確率過程が明らかな場合は, 単に T_x^-, T_x と書く.

X を以下の条件を満たす, 正の跳びを持たない $\mathbb{R}$ 値標準過程とする:

(A1) $(x, y) \mapsto \mathbb{E}_x^X\left[e^{-T_y}\right] > 0$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測関数.

(A2) X は m_X を reference measure に持つ.

(A3) X Feller 性を持つ.

ただし, $\mathbb{P}_x^X$ は x を出発する X の法則である. また, Y は (A1), (A3) と持ち, reference measure に m_Y を持つ, 正の跳びを持たない $\mathbb{R}$ 値標準過程とする. n_0^X と n_0^Y を, それぞれ X と Y の 0 での周遊測度とする. ただし, 0 が自身に irregular な場合は, 0 を出発し 0 で停止する確率過程の法則を定数倍したものを周遊測度と呼ぶことにする.

関数 $\psi : (0, \infty) \times (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$ は

$$n_0^X\left[1 - e^{-T_0^-}\mathbb{E}^Y_{\psi(X_{T_0^- -}, X_{T_0^-})}\left[e^{-T_0}\right] : 0 < T_0^- < T_0\right] < \infty \tag{2.2}$$

を満たすものとする. この ψ は**着地関数**と呼ぶことにする.

周遊測度 n_0^U を以下のように定義する: すべての非負可測汎関数 F に対し,

$$\begin{aligned} n_0^U[F(U)] &= c_0 n_0^Y\left[F(Y) : T_0^- = 0\right] \\ &\quad + n_0^X\left[\mathbb{E}^{Y^0}_{\psi(X_{T_0^- -}, X_{T_0^-})}[F(\omega \circ Y)]\,\big|_{\omega = k_{T_0^-}X} : 0 < T_0^- < T_0\right] \\ &\quad + n_0^X\left[F(X) : T_0^- = T_0\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

を満たす. ただし, c_0 は非負な実数で, X について 0 が自身に対して irregular な場合, もしくは Y について 0 が $(-\infty, 0)$ に対して irregular な場合は $c_0 = 0$ を満たす. また,

$$k_{T_0^-}X_t = \begin{cases} X_t & , t < T_0^-, \\ \partial & , t \geq T_0^-, \end{cases} \qquad \omega \circ Y_t = \begin{cases} \omega(t), & t < \zeta(\omega), \\ Y_{t-\zeta(\omega)}, & t \geq \zeta(\omega). \end{cases} \tag{2.4}$$

である. 周遊測度 n_0^U と同様に, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を出発し 0 で停止する確率過程の法則 $\mathbb{P}_x^U$ も定義する. 周遊理論を用いて, 周遊測度 n_0^U と停止過程の法則 $\mathbb{P}_x^U$ を持つ右過程 U を構成する.

補題 2.1. 右過程 U は Feller 性を持つ. よって U は標準過程である.

Cutoff for lamplighter chains on fractals

中村ちから *
(Amir Dembo 氏 †、 熊谷隆氏 ‡との共同研究）

November 9th, 2017

本講演ではランプライターランダムウォーク (lamplighter random walk) のカットオフ現象について議論する。グラフ G 上のランプライターグラフとは G の各頂点にランプ $(=\{0,1\})$ を付加してできるグラフ ($\mathbb{Z}_2 \wr G$ とかかれる) であり、ランプライターランダムウォークは通常のランダムウォークの動きにさらにランダムにランプの on/off の操作を加えたものであり、（離散）群上のランダムウォークの枠組みで活発に研究されている。カットオフ現象とは、（有限）マルコフ連鎖の分布が 「急速に」 不変分布に収束する現象のことであり、有限マルコフ連鎖の理論の中で中心的な問題の一つである。

近年、ランダムウォークが訪れにくい点 (late point) の研究が活発になされているが、過渡的なランダムウォーク（例えば $\mathbb{Z}^d (d \geq 3)$ 上のランダムウォーク）の late point たちにはあまり相関がない、という性質を、ランプライターランダムウォークの混合時間 (mixing time) やカットオフ現象 (cutoff phenomenon) の理論の枠組みで定量的に扱うという試みがなされている ([2]、また非常に関連するものとして [3])。本講演では、過渡的な場合だけでなく（強）再帰的な場合（典型的な例としてフラクタル上のランダムウォーク）も含めて、ランプライターランダムウォークの混合時間やカットオフ現象を議論する。

我々の主結果は、以下のランプライターランダムウォークのカットオフ現象に関する両分である。

Theorem 1 (Dembo, Kumagai and N. [1])**.** 有限グラフの列 $\{G^{(N)}\}_N$ は、*(i)* d_f*-set* 条件 $(c^{-1}r^{d_f} \leq \sharp B^{(N)}(x,r) \leq cr^{d_f})$ と *(ii) (uniform) parabolic Harnack* 不等式を満たすと仮定する。このとき、

- *(a)* もし $\{G^{(N)}\}_N$ が強再帰的なら、ランプライターランダムウォークはカットオフをもたない。
- *(b)* もし $\{G^{(N)}\}_N$ が過渡的なら、ランプライターランダムウォークは $\frac{1}{2}T_{\mathrm{cov}}(G^{(N)})$ を閾値としてカットオフをもつ。（但し $T_{\mathrm{cov}}(G^{(N)})$ は期待被覆時間を表す。）

我々の本質的な貢献は (a) の場合である。(a) が従う本質的な理由は、ランダムウォークが強再帰的な場合は被覆時間がその平均に集中 (concentrate) していない、ということであるのに対し、(b) が従う本質的な理由は被覆時間がその平均に集中している、ということである。講演では、(a) の場合になぜ被覆時間が重要になるかのアイデアを共有することを試み、時間に余裕があれば (b) や late point との関連に言及する。

References

[1] A. Dembo, T. Kumagai and C. Nakamura, Cutoff for lamplighter chains on fractals. Preprint, available at `arXiv:1711.02788`.

[2] J. Miller and Y. Peres, Uniformity of the uncovered set of random walk and cutoff for lamplighter chains. Ann. Probab. 40 (2012), no. 2, 535–577.

[3] J. Miller and P. Sousi, Uniformity of the late points of random walk on Z_n^d for $d \geq 3$. Probab. Theory Related Fields 167 (2017), no. 3-4, 1001–1056.

*京都大学理学研究科・数学数理解析専攻, e-mail: chikaran@kurims.kyoto-u.ac.jp
†Department of Statistics, Stanford University
‡京都大学数理解析研究所

行列式点過程の離散化とベルヌイ性

Shota OSADA
Kyushu University, s_osada@outlook.com

1. 導入

確率空間 $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu)$ と，$G=\mathbb{Z}^d$ または $\mathbb{R}^d$ が作用する保測変換 $\mathsf{T}_G=\{\mathsf{T}_g : g\in G\}$ の組を保測力学系と呼ぶ．$(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu,\mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ がベルヌイシフトであるとは，直積確率空間とその上のシフトと同型になることである．また $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu,\mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ がベルヌイフローであるとは，変換を $\mathbb{Z}^d$ 作用に制限した $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu,\mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ がベルヌイシフトになることである．本講演ではこれらを単にベルヌイ性と呼ぶことにする．

離散行列式点過程のベルヌイ性 [2] は既に知られていたが，連続の場合は未解決であった．本講演では，R.Lyons-J.Steif [2] による $\mathbb{Z}^d$ 上の定常行列式点過程のベルヌイ性を連続に持ち上げ，この問題を解決する．証明では，まず [3] で導入した行列式点過程の離散近似に対してベルヌイ性を示す．更に，Ornstein の同型理論における諸定理により連続空間に持ち上げることで，連続空間の行列式点過程のベルヌイ性を証明する．

行列式点過程とはその（Lebesgue 測度に対する）相関関数 ρ^n が、核関数 K の行列式で与えられる点過程である:

$$\rho^n(x_1,\dots,x_n)=\det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n$$

$\mathbb{R}^d$ 上の平行移動不変な核関数 $K(x,y)=k(x-y)$ をもつ行列式点過程は平行移動不変となる．本講演ではこのような行列式点過程に対して，ベルヌイ性を示す．このベルヌイ性は [3] で示した tail 自明性よりも真に強い性質である．

2. 設定

確率空間 $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu)$，$(\mathcal{Y},\mathcal{G},\nu)$ が同型であるとは確率 1 の集合 $\mathcal{X}_0$ と $\mathcal{Y}_0$ の間の全単射 φ が存在して，$\mu\circ\varphi^{-1}=\nu$ となることである．また，保測力学系 $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu,\mathsf{T}_G)$，$(\mathcal{Y},\mathcal{G},\nu,\mathsf{U}_G)$ が同型であるとは確率空間の同型 φ が存在して $\varphi\circ\mathsf{T}_g=\mathsf{U}_g\circ\varphi$（${}^\forall g\in G$）となることである．

保測力学系の同型においてエントロピーは不変量であるが，一般には完全不変量ではない．Ornstein は 1969 年に $d=1$ のベルヌイシフトにおいてエントロピーが完全不変量となることを示した．その後 Ornstein 同型理論は従順群が作用する変換の場合にまで拡張された [4]．本講演では $\mathbb{Z}^d$ または $\mathbb{R}^d$ が作用する場合のみを扱う．また以下に述べる定理では確率空間が $[0,1]$ 上のルベーグ測度に同型であるとする．

核関数 $K(x,y)=k(x-y)$ を，k が $[0,1]$ に値を取る関数 $\hat{k}\in L^1(\mathbb{R}^d)$ のフーリエ変換

$$k(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot t}\hat{k}(t)dt$$

で与えられるものとする．例えば，$k(x)=\frac{\sin x}{x}$ が典型例である．このとき相関関数が K の行列式で与えられる平行移動不変な点過程 $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu)$ が一意に定まる [5][6]．ここで，$\mathbb{R}^d$ 上の非負整数値ラドン測度 $\mathrm{x}=\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_{x_i}(\cdot)$ を配置と呼び，$\mathcal{X}$ は配置全体とする．$\mathcal{X}$ には漠位相が入り，$\mathcal{F}$ はそのボレル集合族である．配置の平行移動を $\mathsf{T}_{\mathbb{R}^d}$ とする．次が本講演で示す主定理である．

定理 1 (主定理)**.** $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu,\mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ はベルヌイフローである．

3. ξ_n-商変換 $(\mathcal{Z},\mathcal{H},\bar{\mu},\mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d})$ と離散近似 $(\mathcal{Y},\mathcal{G},\nu,\mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$

Ornstein の同型理論において，次の定理が知られている．

定理 2 (Ornstein)**.** $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu,\mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ の $\mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d}$-不変な可測分割の列 $\{\xi_n : n\in\mathbb{N}\}$ で，各 ξ_n-商変換がエントロピー有限なベルヌイシフトである時，その細分 $\xi=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\xi_n$ による商変換はベルヌイシフトである．

$\mathbb{R}^d$ の分割 $X_n:=\{\prod_{i=1}^d[z_j,z_j+\frac{1}{2^{n-1}}) : z\in\frac{1}{2^{n-1}}\mathbb{Z}^d\}$ に対し，$\mathcal{X}$ の分割を

$$\xi_n:=\bigvee_{A\in X_n}\big\{\{\mathrm{x}\in\mathcal{X};\mathrm{x}(A)=m\} : m\in\mathbb{N}_0\big\}$$

で定めると，定理 2 より，$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ のベルヌイ性は $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ の ξ_n-商変換のベルヌイ性に帰着される．以下の議論は n に依らないので，ξ_1 の場合について述べる．

$\mathcal{F}_1 := \sigma[\{\mathrm{x} \in \mathcal{X}; \mathrm{x}(A) = m\} : m \in \mathbb{N}_0, A \in X_1]$ による条件付確率 $\mu(\cdot|\mathcal{F}_1)$ は $A \leftrightarrow z$ の対応で $\mathbb{Z}^d$ 上の平行移動不変な点過程とみなせる．平行移動を $\mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d}$ としこの保測力学系を $(\mathcal{Z}, \mathcal{H}, \bar{\mu}, \mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d})$ とおく．これは $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ の ξ_1-商変換である．

$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ から $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の特別な正規直交基底 $\Phi = \{\phi_{(z,n)} : (z, n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}\}$ を構成することで，そのラベル上の核関数

$$\mathbb{K}\big((z,n),(z',n')\big) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x,y)\phi_{(z,n)}(x)\overline{\phi_{(z',n')}(y)}dxdy$$

は $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ 上の離散行列式点過程を決定する．K の平行移動不変性より，この点過程は $\mathbb{Z}^d$ 方向に関して平行移動不変である．平行移動を $\mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d}$ としこの保測力学系を $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ とおく．

$\mathbb{N}$ 方向の配置の射影を $\Pi : \mathsf{Conf}(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}) \to \mathsf{Conf}(\mathbb{Z}^d)$ と置くと，$\bar{\mu} \circ \Pi^{-1} = \nu$ となる．従って，$\bar{\mu}$ は ν の商変換となる．ここで Ornstein の同型理論において，次の定理が知られている．

定理 3 (Ornstein)**.** ベルヌイシフトの任意の自明でない商変換はベルヌイシフトである．

定理 3 より，$(\mathcal{Z}, \mathcal{H}, \bar{\mu}, \mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d})$ のベルヌイ性は離散化 $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ のベルヌイ性に帰着される．

補題 1. $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ がベルヌイシフトであれば，$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ はベルヌイフローである．

4. 離散近似 $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ のベルヌイ性

$\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ の分割 $Y_n := \big\{\{z\} \times \{1\}, \ldots, \{z\} \times \{n\}, \{z\} \times \{n, n+1 \ldots\} : z \in \mathbb{Z}^d\big\}$ に対し，$\mathcal{Y}$ の分割を

$$\eta_n := \bigvee_{A \in Y_n} \big\{\{\mathrm{y} \in \mathcal{Y}; \mathrm{y}(A) = 0\}, \{\mathrm{y} \in \mathcal{Y}; \mathrm{y}(A) \geq 1\}\big\}$$

で定めると，定理 2 より η_n-商変換がベルヌイであることを示せば補題 1 が示される．この η_n-商変換は $\mathbb{Z}^d$ 不変な有限スピン系と見なせる．$\mathbb{Z}^d$ 不変な有限スピン系では，原点でのハミング距離の 1 次の Wasserstein 距離を $\bar{d}$ 距離と呼び，次の定理が知られている．

定理 4. (Ornstein) $\mathbb{Z}^d$ 不変な有限スピン系においてベルヌイ性は $\bar{d}$ 距離で閉じている．

[2] と同様に核関数 K のフーリエ変換の構造から η_n-商変換のベルヌイシフトによる $\bar{d}$ 近似を構成し，単調カップリングにより $\bar{d}$ での収束を評価する．定理 4 より η_n-商変換のベルヌイ性が示される．

参考文献

[1] Lyons, R. : Determinantal probability measures, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98** (2003), 167-212.

[2] Lyons, R., and Steif, J. E. :Stationary determinantal processes: phase multiplicity, bernoullicity, and domination, Duke Math. J. Volume 120, Number 3 (2003), 515-575.

[3] Osada, H., Osada, S. :Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and the tail triviality, (preprint)

[4] Ornstein, D. S. and Weiss, B. : Entropy and isomorphism theorems for the action of an amenagle group, Journal d'Analyse Mathematique, 48 (1987), 1-141.

[5] Soshnikov A. : Determinantal random point fields, Russian Math. Surveys **55** (2000), 923–975.

[6] Shirai T., and Takahashi Y. : Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: Fermion, Poisson and Boson processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

Poisson statistics for Gaussian beta ensembles at high temperature

Fumihiko Nakano[1] and Khanh Duy Trinh[2]

[1]Department of Mathematics, Gakushuin University
[2]Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Let $T_{n,\beta}, (n \in \{1, 2, \dots\}, \beta > 0)$ be a symmetric tridiagonal matrix whose entries are independent (up to the symmetric constraint) and are distributed as

$$T_{n,\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\beta}} \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & & \\ \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-2)\beta} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \tilde{\chi}_{\beta} & \mathcal{N}(0,1) \end{pmatrix}.$$

Here $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ denotes the Gaussian distribution with mean μ and variance σ^2, and $\tilde{\chi}_k$ denotes the distribution of the square root of the gamma distribution with parameters $(k/2, 1)$. Then the eigenvalues $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ of $T_{n,\beta}$ have the following joint density

$$p_{n,\beta}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \propto \prod_{i<j} |\lambda_j - \lambda_i|^{\beta} e^{-\frac{n\beta}{4}(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)},$$

which is referred to as Gaussian beta ensembles. These models were introduced in [2]. For $\beta = 1, 2$ and 4, they recover the well-known Gaussian orthogonal/unitary/symplectic ensembles, respectively.

Let

$$L_{n,\beta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j},$$

with δ_λ being a Dirac measure, be the empirical distribution of $T_{n,\beta}$. For fixed β, the empirical distribution $L_{n,\beta}$ converges to the semicircle distribution, which is well known as Wigner's semicircle law. However, Wigner's semicircle law is not restricted to the case of fixed β. A complete description of the global law for Gaussian beta ensembles can be found in [5].

Theorem 1 (Global law)**.** (i) *As $n \to \infty$ with $n\beta \to \infty$, the empirical distribution $L_{n,\beta}$ converges weakly to the semicircle distribution, almost surely. This means that for any bounded continuous function f, almost surely,*

$$\int f(x) dL_{n,\beta}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) \to \int_{-2}^{2} f(x) \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2\pi} dx.$$

(A probability measure with density $(2\pi)^{-1}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$ is called the semicircle distribution.)

(ii) *As $n \to \infty$ with $n\beta \to 2\alpha \in (0, \infty)$, the empirical distribution $L_{n,\beta}$ converges weakly to a measure ν_α, almost surely. Here the density of ν_α is given by $\nu_\alpha = \sqrt{\alpha}\bar{\mu}_\alpha(\sqrt{\alpha}x)$ with*

$$\bar{\mu}_\alpha(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\hat{f}_\alpha(x)|^2}, \text{ where } \hat{f}_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}} \int_0^\infty t^{\alpha - 1} e^{-\frac{t^2}{2} + ixt} dt.$$

A central limit theorem is also investigated. Refer to [5] and the references therein for more details.

The aim of this talk is to show the Poisson statistics for bulk statistics as $n\beta \to 2\alpha \in [0, \infty)$. For convenience, we consider a rescaled version of $T_{n,\beta}$,

$$\tilde{T}_{n,\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & & \\ \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-2)\beta} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \tilde{\chi}_{\beta} & \mathcal{N}(0,1) \end{pmatrix}.$$

For the global behavior, note that the empirical distribution of $\tilde{T}_{n,\beta}$ converges weakly to $\bar{\mu}_\alpha$, almost surely. Note also that, under this scaling, the case $\alpha = 0$ is treated similarly in which the limiting measure is nothing but the standard Gaussian distribution $\mathcal{N}(0,1)$.

Theorem 2 (Local law/bulk statistics)**.** *For fixed $E \in \mathbb{R}$, as $n \to \infty$ with $n\beta \to 2\alpha \in [0, \infty)$, the point process*

$$\xi_{n,\beta} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{n(\lambda_j - E)}$$

converges weakly to a homogeneous Poisson point process with intensity $\bar{\mu}_\alpha(E)$. Here $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ are the eigenvalues of $\tilde{T}_{n,\beta}$.

By analyzing the joint density, it was shown in [1] that the bulk statistics $\xi_{n,\beta}$ converges weakly to a homogeneous Poisson point process with intensity θ_E, where

$$\theta_E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{E^2}{2} + 2\alpha \int \log|E - y| \bar{\mu}_\alpha(dy)\right).$$

We introduce another approach to derive the Poisson statistics via the tridiagonal random matrix models. In the regime where $n\beta \to 2\alpha$, the diagonal of $T_{n,\beta}$ is an i.i.d. (independent identically distributed) sequence while the sub-diagonal is uniformly "bounded". This observation suggests us to use a well-known method of Minami [3]. For this purpose, we need (i) Wegner's bound, (ii) Minami's bound, (iii) exponential decay of Green's functions and (iv) local law. Here the local law (iv) requires that $\mathbb{E}[\xi_{n,\beta}(I)] = \mathbb{E}[\#\{\lambda_j \in E + n^{-1}I\}] \to \bar{\mu}_\alpha(E)|I|$, for any bounded interval I. A non-trivial identity $\theta_E = \bar{\mu}_\alpha(E)$ is then derived by this approach.

In the model considered in [3], the exponential decay of Green's functions (iii) and the local law (iv) are consequence of stationary invariant property. However, it is not the case for the matrix $\tilde{T}_{n,\beta}$. To show these two properties are the main issue of this approach. Detailed proofs can be found in the preprint [4].

References

[1] Benaych-Georges, F., Péché, S.: Poisson statistics for matrix ensembles at large temperature. J. Stat. Phys. **161**(3), 633–656 (2015)

[2] Dumitriu, I., Edelman, A.: Matrix models for beta ensembles. J. Math. Phys. **43**(11), 5830–5847 (2002)

[3] Minami, N.: Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model. Comm. Math. Phys. **177**(3), 709–725 (1996)

[4] Nakano, F., Trinh, K.D.: Gaussian beta ensembles at high temperature: eigenvalue fluctuations and bulk statistics. arXiv:1611.09476

[5] Trinh, K.D.: Global spectrum fluctuations for gaussian beta ensembles: A martingale approach. Journal of Theoretical Probability (2017). DOI 10.1007/s10959-017-0794-9

Large deviations for intersection measures of some Markov processes

Takahiro Mori*

The aim of this talk is to analyze the intersection measures in a general setting.

Let p be an integer with $p \geq 2$, E be a locally compact, separable metric space and m be a Radon measure on E with supp$[m] = E$. Let $X^{(1)}, \cdots, X^{(p)}$ be p independent irreducible Hunt processes on E, with life time $\zeta^{(1)}, \cdots, \zeta^{(p)}$ and start $x_1, \cdots, x_p \in E$, respectively. For simplicity, we also assume that $X^{(1)}, \cdots, X^{(p)}$ have the same law. For each $t > 0$, under the condition that all life times $\zeta^{(1)}, \cdots, \zeta^{(p)}$ are grater than t, *the intersection measre* ℓ_t^{IS} is formally witten as

$$\ell_t^{\mathrm{IS}}(A) = \int_A \int_{[0,t]^p} \prod_{i=1}^p \delta_x(X^{(i)}(s_i)) ds_1 \cdots ds_p m(dx) \qquad \text{for } A \subset E \text{ Borel.}$$

Intersection measure is firstly introduced in [LG92], and until now, only for the cases of Brownian motion and stable processes, its deep natures have been obtained. ([CR05], [KM13])

To deal with the intersection measure in a general setting, we now make five assumptions on $X^{(i)}$. Here R_1 is the 1-order resolvent, and $\{T_t\}$ is the linear operator determined by the transition probability p_t of $X^{(i)}$:

(A1) (Tightness) $\forall \varepsilon > 0, \exists K$: compact, such that $\sup_{x \in E} R_1 1_{K^c}(x) \leq \varepsilon$.

(A2) (Transition density) $\forall t > 0$ and $\forall x \in E$, the transition probability $p_t(x, dy)$ is absolutely continuous with respect to m, and its density $p_t(\cdot, \cdot)$ is continuous and bounded on $E \times E$.

(A3) (Trace estimate) There exist $\rho > 0$, $t_0 > 0$ and $C > 0$ such that

$$C^{-1} t^{-\rho/2} \leq \int_E p_t(x, x) m(dx) \leq C t^{-\rho/2}, \qquad \text{for all } t \in (0, t_0].$$

(A4) (Ultra-contractivity) There exist $\mu \in (2, \frac{2p}{p-1})$, $C > 0$ and $t_1 > 0$ such that

$$\|T_t\|_{1 \to \infty} \leq C t^{-\mu/2}, \qquad \text{for all } t \in (0, t_1].$$

(A5) (Green function estimate)

$$\sup_{x \in E} \int_E R_1(x, y)^p m(dy) < \infty, \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{x \in E} \int_E R_{1,\delta}(x, y)^p m(dy) = 0,$$

where

$$R_1(x, y) = \int_0^\infty e^{-t} p_t(x, y) dt, \quad R_{1,\delta}(x, y) = \int_0^\delta e^{-t} p_t(x, y) dt \qquad \text{for } x, y \in E.$$

We can check these assumptions easily, if $X^{(i)}$ enjoys (sub-)Gaussian or jump-type heat kernel estimates.

*Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, JAPAN. tmori@kurims.kyoto-u.ac.jp

The occupation measure $\ell_t^{(i)}$ and for each $\varepsilon > 0$ the approximated occupation measure $\ell_{\varepsilon,t}^{(i)}$ of $X^{(i)}$ until time $t > 0$ are defined by

$$\ell_t^{(i)}(A) := \int_0^t 1_A(X^{(i)}(s))ds, \qquad \ell_{\varepsilon,t}^{(i)}(A) := \int_A \left[\int_{[0,t]} p_\varepsilon^{(i)}(X^{(i)}(s), x)ds\right] m(dx)$$

for $A \subset E$, on the event $\{t < \zeta^{(i)}\}$.

For each $\varepsilon > 0$, the approximated (mutual) intersection measure $\ell_{\varepsilon,t}^{\mathrm{IS}}$ of $X^{(1)}, \cdots, X^{(p)}$ until time $t > 0$ is defined by

$$\ell_{\varepsilon,t}^{\mathrm{IS}}(A) := \int_A \left[\int_{[0,t]^p} \prod_{i=1}^p p_\varepsilon^{(i)}(X^{(i)}(s_i), x)ds_1 \cdots ds_p\right] m(dx)$$

for $A \subset E$, on the event $\{t < \zeta^{(1)} \wedge \cdots \wedge \zeta^{(p)}\}$.

We define the function $\mathbf{J} : \mathcal{M}_f(E) \times (\mathcal{M}_1(E))^p \to [0, \infty]$ by

$$\mathbf{J}(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_p) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^p \{\mathcal{E}(\psi_i, \psi_i) - \lambda_1\} & ;\ \text{if } \psi_i = \sqrt{\dfrac{d\mu_i}{dm}} \in \mathcal{F} \text{ and } \displaystyle\prod_{i=1}^p \frac{d\mu_i}{dm} = \frac{d\mu}{dm}, \\ \infty & ;\text{otherwise} \end{cases}$$

for $(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_p) \in \mathcal{M}_f(E) \times (\mathcal{M}_1(E))^p$, where $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ is the associated regular Dirichlet form of $X^{(i)}$ and $\lambda_1 := \inf\{\mathcal{E}(\psi, \psi); \psi \in \mathcal{F}, \|\psi\|_2 = 1\}$ is the bottom of spectrum.

The first result enables us to deal with ℓ_t^{IS} in our setting:

Proposition 0.1. *Suppose* **(A5)** *and let $t > 0$. Then, there exists the random measure $\ell_t^{IS} \in \mathcal{M}_f(E)$ such that, in the vague topology of $\mathcal{M}_f(E)$,*

$$\ell_{t,\varepsilon}^{IS} \to \ell_t^{IS} \quad \textit{in distribution, as } \varepsilon \to 0,$$

with respect to the probability measure $\widetilde{\mathbb{P}}_t := \mathbb{P}(\,\cdot \mid \{t < \zeta^{(1)} \wedge \cdots \wedge \zeta^{(p)}\})$.

□

The following is *one of* our main results. This extends [KM13], in which the large deviation principle is established for the case of d-dimensional Brownian motions before exiting some bounded open set $B \subset \mathbb{R}^d$:

Theorem 0.2 (Large deviation principle)**.** *Suppose* **(A1) - (A5)***. Then the tuple*

$$\left(\frac{1}{t^p}\ell_t^{IS}; \frac{1}{t}\ell_t^{(1)}, \cdots, \frac{1}{t}\ell_t^{(p)}\right) \in \mathcal{M}_f(E) \times (\mathcal{M}_1(E))^p$$

satisfises the large deviation principle as $t \to \infty$, with probability $\widetilde{\mathbb{P}}_t$, scale t and the good rate function $\mathbf{J}$*.*

□

References

[CR05] Xia Chen and Jay Rosen. Exponential asymptotics for intersection local times of stable processes and random walks. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(5):901–928, 2005.

[KM13] Wolfgang König and Chiranjib Mukherjee. Large deviations for Brownian intersection measures. *Comm. Pure Appl. Math.*, 66(2):263–306, 2013.

[LG92] Jean-François Le Gall. Some properties of planar Brownian motion. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XX—1990*, volume 1527 of *Lecture Notes in Math.*, pages 111–235. Springer, Berlin, 1992.

Behavior of fundamental solutions for critical Schrödinger operators

福島大学人間発達文化学類　　和田正樹

2017 年 12 月 15 日

1　準備及び考えたい問題

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ を生成作用素 $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ $(0 < \alpha \leq 2)$ とする $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α-安定過程とする。このとき、対応するディリクレ形式が $\mathcal{E}(u,u) = (-\mathcal{L}u,u)_m$ として、推移確率密度関数 $p(t,x,y)$ が方程式 $\partial u/\partial t = \mathcal{L}u$ の基本解として与えられる。ここで、m は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度、$(\cdot,\cdot)_m$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ における内積を表す。更に、グリーン核 $G(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty p(t,x,y)dt$ により、以下の条件が成立している非負測度 μ を考える。

$$\lim_{a\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|\leq a} G(x,y)\mu(dy) = 0, \quad \lim_{R\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|y|>R} G(x,y)\mu(dy) = 0,$$
$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} G(x,y)\mu(dy)\mu(dx) < \infty.$$

このとき、シュレディンガー形式を $\mathcal{E}^\mu(u,u) = \mathcal{E}(u,u) - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx)$ で定め、対応する作用素を $\mathcal{L}^\mu$ とする。方程式 $\partial u/\partial t = \mathcal{L}^\mu u$ にも基本解 $p^\mu(t,x,y)$ が存在することが知られているが ([1])、ここではその挙動を元の基本解 $p(t,x,y)$ の挙動と比較する。

2　先行結果と主結果

直感的には μ が「十分小さい」ときには、$p^\mu(t,x,y)$ は元の $p(t,x,y)$ と似たような挙動をすること（基本解の安定性という）が予想される。そこで、まずは測度 μ の大きさを表すための指標を

$$\lambda(\mu) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) \mid \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx) = 1\right\}$$

で定める。[4] や [5] では、基本解の安定性が成立するための必要十分条件が、$\lambda(\mu) > 1$ を満たすこと、すなわち μ が劣臨界的であることが示された。

$\lambda(\mu) = 1$ のとき、μ は臨界的であるといい、$p^\mu(t,x,y)$ は元の $p(t,x,y)$ とは異なる挙動をすることがわかる。しかし、具体的な振る舞いが与えられているのは、元のマルコフ過程が 3 次元ブラウン運動、$(d,\alpha) = (3,2)$ の場合に限られており ([2, 4])、次の通りである。

$$p^\mu(t,x,y) \asymp c_1\left(1+\frac{\sqrt{t}}{1+|x|}\right)\left(1+\frac{\sqrt{t}}{1+|y|}\right)t^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-c_2\frac{|x-y|^2}{t}\right) \tag{2.1}$$

一般の安定過程の枠組みでは、$p^\mu(t,x,y)$ そのものの具体的な振る舞いは未だ確立されていないが、今回の主結果では時間無限大での漸近振る舞いが、次の通り得られた。

定理 2.1. μ は臨界的で $h(x)$ はシュレディンガー形式における基底状態とする。$K_{d,\alpha}$ を適切な正数とするとき、$p^\mu(t,x,y)$ は以下の漸近挙動をもつ。

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} t^{2-\frac{d}{\alpha}} p^\mu(t,x,y) &= K_{d,\alpha}h(x)h(y) \quad (1<d/\alpha<2)\\ \lim_{t\to\infty}(\log t)p^\mu(t,x,y) &= K_{d,\alpha}h(x)h(y) \quad (d/\alpha=2)\\ \lim_{t\to\infty} p^\mu(t,x,y) &= K_{d,\alpha}h(x)h(y) \quad (d/\alpha>2)\end{aligned}$$

ここで、基底状態については $h(x)\asymp 1\wedge|x|^{\alpha-d}$ の評価が成り立っており、いることに注意すると、定理 2.1 は、$(d,\alpha)=(3,2)$ における先行結果 (2.1) を、$t\to\infty$ のときの振る舞いに限って拡張したものである。また、[3] では零臨界的なときの基本解が時間無限大で消えることを示しているが、本結果により、そのオーダーが厳密に確定できている。

証明の大まかな流れは次の通りである。

(1) [6] にて扱われている、基本解 $p^\mu(t,x,y)$ におけるエルゴード型定理。すなわち、$k(t)$ を d/α に応じて適切に選ぶことで、適切な正数 $C_{d,\alpha}$ により $\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{k(t)}\displaystyle\int_0^t p^\mu(\epsilon+s,x,y)ds = C_{d,\alpha}h(x)h(y)$ がいえる。特に $d/\alpha>2$ のときは $k(t)=t$ であり、エルゴード定理そのものである。

(2) $L^2(h^2\cdot m)$ 上のマルコフ半群 $P_t^{\mu,h}f(x)=\mathbb{E}_x\left[\exp(A_t^\mu)\dfrac{h(X_t)}{h(X_0)}f(X_t)\right]$ において、$(P_t^{\mu,h}f,f)_{h^2\cdot m}$ は t に関して単調減少である。ここで、A_t^μ は μ とルヴューズ対応するような正値連続な加法汎関数である。

(3) 任意の非負の実数 c_1,c_2 と $\mathbb{R}^d$ の 2 点 x_0,y_0 に対して、関数列 $f_n(x)$ を適切に選ぶことで、$(P_t^{\mu,h}f_n,f_n)_{h^2\cdot m}$ は $c_1^2p^\mu(t,x_0,x_0)+2c_1c_2p^\mu(t,x_0,y_0)+c_2^2p^\mu(t,y_0,y_0)$ に収束させることができる。特に、この収束値も t に関して単調減少である。

(4) (1) と (3) より、$\dfrac{p^\mu(t,x,y)}{k'(t)}$ は $t\to\infty$ のとき $C_{d,\alpha}h(x)h(y)$ に収束する。

参考文献

[1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, In Random partial differential equations (Ober-wolfach, 1989), Birkhäuser, Inter. Ser. Num. Math. 102, 1—31, (1991).

[2] Grigor'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Contemp. Math. 338, 93–191, (2006).

[3] Pinchover, Y.: Large time behavior of the heat kernel, Journal of Funct. Analysis 206, 191–209, (2004).

[4] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85–94, (2007).

[5] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, Tohoku Math. Journal 66, 523–537, (2014).

[6] Wada, M.: Ergodic-type limit theorem for fundamental solutions of critical Schrödinger operators, Journal of Theor. Probab., in press.

IRREDUCIBLE DECOMPOSITION FOR MARKOV PROCESSES

Kazuhiro Kuwae

(Fukuoka University)

1. Main Theorem

Let E be a separable metric space and $\mathfrak{m}$ a σ-finite Borel measure on E. We consider a quasi-regular semi-Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ with a lower bound $-\gamma$ on $L^2(E;\mathfrak{m})$ $(\gamma\geq 0)$. Under the quasi-regularity of $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, we may (and do) assume that E is a Lusin topological space, i.e., E is homeomorphic to a Borel subset of a compact metric space. An $\mathfrak{m}$-measurable subset B of E is said to be *weakly* $(T_t)_{t\geq 0}$*-invariant* if $\mathbf{1}_{B^c}T_t\mathbf{1}_B u=0$ for any $t>0$ and $u\in L^2(E;\mathfrak{m})$, equivalently B^c is weakly $(\hat{T}_t)_{t\geq 0}$-invariant. An $\mathfrak{m}$-measurable subset B of E is said to be *(strongly)* $(T_t)_{t\geq 0}$*-invariant* if $T_t\mathbf{1}_B u=\mathbf{1}_B T_t u$ for any $t>0$ and $u\in L^2(E;\mathfrak{m})$. Clearly, the strong $(T_t)_{t\geq 0}$-invariance implies the weak one. Any semi-Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ with a lower bound $-\gamma$ on $L^2(E;\mathfrak{m})$ is said to be *strictly irreducible* (resp. *irreducible*) if for any weakly (resp. strongly) $(T_t)_{t\geq 0}$-invariant set B relative to the C_0-semigroup $(T_t)_{t\geq 0}$ of (resp. *irreducible*) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathfrak{m}(B)=0$ or $\mathfrak{m}(B^c)=0$. The process $\mathbf{X}$ is called $\mathfrak{m}$*-irreducible* if the corresponding semi-Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ on $L^2(E;\mathfrak{m})$ is irreducible (see [4]). A set $B(\subset E_\partial)$ is called *nearly Borel* if there exist Borel subsets B_1,B_2 of E_∂ such that $B_1\subset B\subset B_2$ and $\mathbf{P}_\mu(X_t\in B_2\setminus B_1,\exists t\in[0,\infty[)=0$ for all $\mu\in\mathcal{P}(E_\partial)$. Denote by $\mathcal{B}^n(E_\partial)$ (resp. $\mathcal{B}^n(E)$) the family of nearly Borel subsets of E_∂ (resp. E). A set A is called *finely open* if for each $x\in A$, there exists a $B\in\mathcal{B}^n(E)$ such that $E\setminus A\subset B$ and $\mathbf{P}_x(\sigma_B>0)=1$. The family of finely open sets defines a topology on E which is called the *fine topology* of $\mathbf{X}$. $\mathbf{X}$ is said to be *finely irreducible* if for any finely open nearly Borel set D with $D\neq\emptyset$, $\mathbf{P}_x(\sigma_D<\infty)>0$ for all $x\in E$ (see [4]). A set $B\subset E$ is said to be $\mathbf{X}$*-invariant* if $B\in\mathcal{B}^n(E)$ and

$$\mathbf{P}_x(X_t\in B \text{ for all } t\in[0,\zeta[,\ X_{t-}\in B \text{ for all } t\in]0,\zeta[)=1,\qquad x\in B.$$

A set $N\subset E$ is called *properly exceptional* if N is a nearly Borel $\mathfrak{m}$-negligible set and $E\setminus N$ is $\mathbf{X}$-invariant. If $\mathbf{X}$ has a decomposition $E=B_1+B_2+N$ such that each B_i $(i=1,2)$ is $\mathbf{X}$-invariant and N is properly exceptional, then each B_i $(i=1,2)$ is strongly $(T_t)_{t\geq 0}$-invariant.

We consider the following conditions:

- **(A)** $\mathbf{X}$ is a diffusion process or $\mathfrak{m}$-symmetric.
- **(AC)** $P_t(x,\mathrm{d}y)\ll\mathfrak{m}(\mathrm{d}y)$ for each $x\in E$ and $t>0$.
- $(\mathbf{AC})'$ For some fixed $\alpha>0$, $R_\alpha(x,\mathrm{d}y)\ll\mathfrak{m}(\mathrm{d}y)$ for each $x\in E$.
- **(RSF)** $R_\alpha(\mathcal{B}_b(E))\subset C_b(E)$ for each $\alpha>0$.

Remark 1.1. (1) In fact, (**AC**) is equivalent to $(\mathbf{AC})'$. This is proved in [2, Theorem 4.2.2] under the $\mathfrak{m}$-symmetry of $\mathbf{X}$, whose proof remains valid provided $\mathbf{X}$ is properly associated with $(\mathcal{E},\mathcal{F})$.
(2) $(\mathbf{AC})'$ is equivalent to Meyer's hypothesis (**L**) (see [1, pp. 112]).
(3) In view of resolvent equation, $(\mathbf{AC})'$ is equivalent to that $R_\alpha(x,\mathrm{d}y)\ll\mathfrak{m}(\mathrm{d}y)$ for each $x\in E$ and any $\alpha>0$.
(4) It is known that $(\mathbf{AC})'$ holds if and only if every exceptional is polar (see [2, Theorem 4.2.4]).
(5) Clearly, (**RSF**) implies $(\mathbf{AC})'$.

Our main theorems are the following:

Theorem 1.1. *Assume* (**A**). *For each $x\in E$, there exists an $\mathcal{E}$-quasi-open and $\mathcal{E}$-quasi -closed nearly Borel set E_x satisfying the following:*

(1) $x\in E_x$.
(2) *There exists a properly exceptional set N such that $E_x\setminus N$ and $E_x^c\setminus N$ are $\mathbf{X}$-invariant.*
(3) *The part process $\mathbf{X}_{E_x}$ is $\mathfrak{m}$-irreducible, i.e., the part space $(\mathcal{E}_{E_x},\mathcal{F}_{E_x})$ on $L^2(E_x;\mathfrak{m})$ is irreducible.*

For each $x\in E$, E_x satisfying (1)–(3) *is unique in the sense that if $\widetilde{E}_x$ satisfies conditions* (1)–(3) *by replacing E_x with $\widetilde{E}_x$, then $E_x=\widetilde{E}_x$ q.e. provided $E_x\cap\widetilde{E}_x$ is not $\mathfrak{m}$-polar. Moreover, for each $x,y\in E$, if $E_x\cap E_y$ is not $\mathfrak{m}$-polar, then $E_x=E_y$ q.e.*

Theorem 1.2. *Assume* (**A**) *and* (**AC**). *For each $x\in E$, there exists a finely open and finely closed Borel set E_x satisfying the following:*

(1) $x\in E_x$.
(2) *E_x and E_x^c are $\mathbf{X}$-invariant.*
(3) *The part process $\mathbf{X}_{E_x}$ is finely irreducible.*

If (**A**) *and* (**RSF**) *are satisfied, then E_x can be taken to be open and closed. For each $x\in E$, E_x satisfying* (1)–(3) *is unique in the sense that if $\widetilde{E}_x$ satisfies all conditions* (1)–(3) *by replacing E_x with $\widetilde{E}_x$, then $E_x=\widetilde{E}_x$. Moreover, for $x,y\in E$, if $E_x\cap E_y\neq\emptyset$, then $E_x=E_y$. More strongly, there exists a countable sets $\{x_i\}$ such that $E=\bigcup_{i=1}^\infty E_{x_i}$ is a disjoint union.*

References

[1] K. L. Chung and J. B. Walsh, *Markov processes, Brownian motion, and time symmetry*, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **249**. Springer, New York, 2005.
[2] M. Fukushima, Y. Ōshima and M. Takeda: Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, de Gruyter, Berlin, 1994.
[3] K. Kuwae, *Irreducible decomposition for Markov processes*, preprint, 2017.
[4] J. Ying and M. Zhao, *The uniqueness of symmetrizing measure of Markov processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 6, 2181–2185.
[5] K. Yosida, *Functional Analysis*, Sixth Edition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York 1980.

L^p-INDEPENDENCE OF SPECTRAL RADIUS FOR GENERALIZED FEYNMAN-KAC SEMIGROUPS

Zhen-Qing Chen, Daehong Kim and Kazuhiro Kuwae

(University of Washington, Kumamoto University and Fukuoka University)

1. Preliminary

Let E be a Lusin metric space and $\mathfrak{m}$ a σ-finite Borel measure on E with full topological support. We add $\partial \notin E$ as an isolated point to E. Let $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, X_t, \mathbf{P}_x, x \in E_\partial)$ be an $\mathfrak{m}$-symmetric special standard process on E with lifetime $\zeta := \inf\{t > 0 \mid X_t = \partial\}$. Let $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ be the Dirichlet form on $L^2(E; \mathfrak{m})$ associated with $\mathbf{X}$. Then $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ is automatically quasi-regular. We further assume that $\mathbf{X}$ satisfies **(AC)**. Suppose μ is a signed smooth measure. Let μ^+ and μ^- denote the positive and negative variation measure of μ in its the Jordan decomposition, which are smooth measures. We define $A^\mu := A^{\mu^+} - A^{\mu^-}$. Let $\dot{\mathcal{F}}_{\rm loc}$ be the family of all functions locally in $\mathcal{F}$ in the broad sense, i.e., $u \in \dot{\mathcal{F}}_{\rm loc}$ if and only if there exist an increasing sequence $\{O_n\}$ of finely open nearly Borel sets satisfying $\bigcup_{n=1}^\infty O_n = E$ and $\{u_n\} \subset \mathcal{F}$ such that $u = u_n$ $\mathfrak{m}$-a.e. on O_n. Since $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ is quasi-regular, every $u \in \dot{\mathcal{F}}_{\rm loc}$ admits an $\mathcal{E}$-quasi-continuous $\mathfrak{m}$-version $\tilde{u}$, and we omit tilde from $\tilde{u}$, i.e., we always assume $u \in \dot{\mathcal{F}}_{\rm loc}$ is represented by its $\mathcal{E}$-quasi-continuous version.

Let N^u be the continuous additive functional of zero quadratic variation appeared in a Fukushima decomposition of $u(X_t) - u(X_0)$ up to the lifetime. Note that N^u is not necessarily of bounded variation in general. Let F be a bounded symmetric function on $E \times E$ which is extended to a function defined on $E_\partial \times E_\partial$ so that $F(x, \partial) = F(\partial, x) = F(x, x)$ for $x \in E_\partial$ (actually there is no need to define the value $F(\partial, y)$ for $y \in E$). Then $A_t^F := \sum_{0<s\le t} F(X_{s-}, X_s)$ (whenever it is summable) is an additive functional of $\mathbf{X}$. It is natural to consider the following generalized non-local Feynman-Kac transforms by the additive functionals $A := N^u + A^\mu + A^F$ of the form

$$e_A(t) := \exp(A_t), \quad t \in [0, \zeta[. \tag{1}$$

We define $Q_t f(x) := \mathbf{E}_x[e_A(t) f(X_t)]$ for any Borel function f. Let $\mathcal{Q}$ be the quadratic form defined by

$$\mathcal{Q}(f, g) := \mathcal{E}(f, g) + \mathcal{E}(u, fg) - \mathcal{H}(f, g), \tag{2}$$

where

$$\mathcal{E}(u, fg) := \frac{1}{2}\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{\langle u, g\rangle} + \frac{1}{2}\int_E g \, \mathrm{d}\mu_{\langle u, f\rangle},$$

$$\mathcal{H}(f, g) := \int_E f(x) g(x) \mu(\mathrm{d}x) + \int_E \int_E f(x) g(y) (e^{F(x,y)} - 1) N(x, \mathrm{d}y) \mu_H(\mathrm{d}x).$$

Here (N,H) be a Lévy system of $\mathbf{X}$. Then $(\mathcal{Q},\mathcal{F})$ is lower bounded on $L^2(E;\mathfrak{m})$ and associated to $(Q_t)_{t>0}$ under the condition $(\mathbf{A})$:

$(\mathbf{A})$ $\mu^+ + N(e^{F^+}-1)\mu_H \in S^1_{EK}(\mathbf{X})$, $\quad \mu_{\langle u\rangle} \in S^1_K(\mathbf{X})$ $\quad$ and $\quad \mu^- + N(F^-)\mu_H \in S^1_D(\mathbf{X})$.

One can define the L^p-spectral radius $\lambda_p(\mathbf{X},u,\mu,F) \in [-\infty,+\infty]$ by

$$\lambda_p(\mathbf{X},u,\mu,F) = -\downarrow \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \|Q_t\|_{p,p} = -\inf_{t>0}\frac{1}{t}\log\|Q_t\|_{p,p}. \tag{3}$$

Using the symmetry of $\{Q_t; t\geq 0\}$ and interpolation, it is easy to deduce (cf. [1, (4.2)]) that

$$\|Q_t\|_{2,2} \leq \|Q_t\|_{p,p} \leq \|Q_t\|_{\infty,\infty} \quad \text{for all } p\in[1,+\infty]$$

and therefore

$$\lambda_2(\mathbf{X},u,\mu,F) \geq \lambda_p(\mathbf{X},u,\mu,F) \geq \lambda_\infty(\mathbf{X},u,\mu,F) \quad \text{for all } p\in[1,+\infty]. \tag{4}$$

Thus to establish the L^p-independence of spectral radius, it suffices to show $\lambda_2(\mathbf{X},u,\mu,F)\leq \lambda_\infty(\mathbf{X},u,\mu,F)$. For $\alpha>0$, denote by $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ the α-subprocess of $\mathbf{X}$. Let $S^1_{EK}(\mathbf{X})$ (resp. $S^1_K(\mathbf{X})$, $S^1_{LK}(\mathbf{X})$) denote the class of smooth measures in the strict sense of extended Kato class (resp. Kato class, local Kato class) with respect to $\mathbf{X}$. Let $S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X})$ (resp. $S^1_{NK_1}(\mathbf{X})$) be the family of natural Green-tight measures of Kato class (resp. natural semi-Green-tight measures of extended Kato class) with respect to $\mathbf{X}$ and $S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ the family of Green-bounded smooth measures with respect to $\mathbf{X}$.

2. Main Theorems

Our main results are the following:

Theorem 2.1. *Suppose that* $\mathfrak{m}(E)<\infty$ *and*

(5) *there is a* $t_0>0$ *so that* P_{t_0} *is a bounded operator from* $L^2(E;\mathfrak{m})$ *to* $L^\infty(E;\mathfrak{m})$.

If $\mu^+ + N(e^{2F^+}-1)\mu_H\in S^1_{EK}(\mathbf{X})$, *then* $\lambda_p(\mathbf{X},u,\mu,F)$ *is independent of* $p\in[1,\infty]$.

Theorem 2.2. *Suppose that* $\mu^+ + N(e^{F^+}-1)\mu_H \in \cap_{\alpha>0} S^1_{NK_1}(\mathbf{X}^{(\alpha)})$ *and* $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X}^{(1)})$. *Then the following holds.*

1. $\lambda_\infty(\mathbf{X},u,\mu,F)\geq \min\{\lambda_2(\mathbf{X},u,\mu,F),0\}$. *Consequently,* $\lambda_p(\mathbf{X},u,\mu,F)$ *is independent of* $p\in[1,\infty]$ *provided* $\lambda_2(\mathbf{X},u,\mu,F)\leq 0$.
2. *Assume that* $\mathbf{X}$ *is conservative. Suppose one of the following holds:*
   - (i) $\mathbf{X}$ *is transient and* $\mu^- + N(F^-)\mu_H\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$. *Assume one of the following:*
     - (a) $u^- := \max\{-u,0\}\in L^p(E;\mathfrak{m})$ *for some* $p\in[1,+\infty]$.
     - (b) $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ *and* $\mathfrak{m}(E)<\infty$.
     - (c) $\mu_{\langle u\rangle}(E)<\infty$.
   - (ii) $u\in\dot{\mathcal{F}}_{\mathrm{loc}}$ *is a bounded function and* $\mu^- + N(F^-)\mu_H\in S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X}^{(1)})$.

   Then $\lambda_\infty(\mathbf{X},u,\mu,F)=0$ *if* $\lambda_2(\mathbf{X},u,\mu,F)>0$. *Hence* $\lambda_p(\mathbf{X},u,\mu,F)$ *is independent of* $p\in[1,\infty]$ *if and only if* $\lambda_2(\mathbf{X},u,\mu,F)\leq 0$.

Theorem 2.3. *Assume* $\mathfrak{m}\in S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X}^{(1)})$. *Then* $\lambda_p(\mathbf{X},u,\mu,F)$ *is independent of* $p\in[1,\infty]$.

These three theorems extend the previous known results by the first author [1, 2], the second and third authors [4, 5], Takeda [7, 8, 9, 10], and Tawara [11].

One of the significant progress is to remove the irreducibility condition for $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. The irreducibility condition of the given Dirichlet form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ has been assumed to apply the Donsker-Varadhan type large deviation principle, or to apply the analytic characterization for the gaugeability of (generalized) Feynman-Kac functionals for the L^p-independence of the spectral radius of (generalized) Feynman-Kac semigroup. Based on the irreducible decomposition for Markov processes (in the previous talk), we can remove the irreducibility condition by utilizing the Terkelsen's Minimax Principle (see [12]).

Secondly, we remove the boundedness condition for the function u appeared in the generalized Feynman-Kac semigroup $(Q_t)_{t>0}$. The boundedness of u has been needed to apply the Chen-Zhang type Girsanov transform in order to reduce the case for $u = 0$. Applying Terkelsen's Minimax Principle again, we can prove Theorems 2.1 and 2.2 by making an exhaustion of increasing finely open nearly Borel sets on which the function u can be regarded to be bounded.

References

[1] Z.-Q. Chen, *Uniform integrability of exponential martingales and spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups*, Stochastic Analysis and Applications to Finance, Essays in Honor of Jia-an Yan. Eds by T. Zhang and X. Zhou, 2012, pp. 55–75.

[2] ———, *L^p-independence of spectral bounds of generalized non-local Feynman–Kac semigroups*, J. Funct. Anal. **226** (2012), no. 6, 4120–4139.

[3] Z.-Q. Chen, D. Kim and K. Kuwae, *L^p-independence of spectral radius for generalized Feynman-Kac semigroups*, preprint, 2017.

[4] G. De Leva, D. Kim and K. Kuwae, *L^p-independence of spectral bounds of Feynman-Kac semigroups by continuous additive functionals*, J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 3, 690–730.

[5] D. Kim, K. Kuwae and Y. Tawara, *Large deviation principle for generalized Feynman-Kac functionals and its applications*, Tohoku Math. J. **68** (2016), no. 2, 161–197.

[6] K. Kuwae, *Irreducible decomposition for Markov processes*, preprint, 2017.

[7] M. Takeda, *L^p-independence of the spectral radius of symmetric Markov semigroups*, Stochastic processes, physics and geometry: new interplays, II (Leipzig, 1999), 613–623, CMS Conf. Proc. **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[8] ———, *L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups*, J. Funct. Anal. **252** (2007), no. 2, 550–565.

[9] ———, *L^p-independence of growth bounds of Feynman-Kac semigroups*, Surveys in stochastic processes, 201–226, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[10] M. Takeda and Y. Tawara, *L^p-independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups*, Forum Math. **21** (2009), no. 6, 1067–1080.

[11] Y. Tawara, *L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type operators with non-local potentials*, J. Math. Soc. Japan, **62** (2010), no. 3, 767–788.

[12] F. Terkelsen, *Some minimax theorems*, Math. Scand. **31** (1972), 405–413.