磁場のある調和振動子鎖モデルにおける熱の異常拡散について

須田 颯 (東京大学大学院数理科学研究科)

2017 年 12 月 14 日

本研究は佐々田 槙子氏 (東京大学大学院数理科学研究科)、齊藤 圭司氏 (慶應義塾大学理工学部物理学科) との共同研究である。

本公演では、1 次元振動子鎖モデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q(x,t) & = p(x,t) \\ \frac{d}{dt}p(x,t) & = V'(q(x)-q(x+1)) - V'(q(x-1)-q(x)),\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

における熱の巨視的挙動について考察する。Fermi-Pasta-Ulam Chain($V(y) = \frac{1}{2}y^2 + a_1 y^3 + a_2 y^4$) に代表される 1 次元非調和振動子鎖モデルでは熱の異常拡散現象が生じていると統計物理の立場から古くより主張されてきた。(しかし、それが数学的に厳密な手法で導かれた結果はまだない。) このような熱の異常拡散には時間発展で系全体の運動量が保存されること

$$\mathcal{A}\sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x) = 0$$
$$\mathcal{A} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x)\partial_{q(x)} + (V'(q(x)-q(x+1)) - V'(q(x-1)-q(x)))\partial_{p(x)}$$

が本質的な条件であろうと考えられてきた。近年では、非調和鎖の相互作用における非線形効果を、系全体の熱及び運動量を保存するような確率的摂動を加えることで近似したモデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q(x,t) & = p(x,t) \\ \frac{d}{dt}p(x,t) & = (\Delta q)(x,t) + Noise \end{cases}$$

が解析され、様々な結果が導かれている ([1],[2],[3])。特に [3] では、巨視的な熱の時間発展は 3/4-分数階拡散方程式

$$\partial_t \mathbf{e}(u,t) = -(-\Delta)_u^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(u,t),\ (u,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$$

に従う、つまり巨視的な熱の異常拡散が確率鎖モデルに対して示されている。

本研究では、[4] により導入された 2 次元中の 1 次元鎖に磁場及び系全体の運動量を保存する確率的摂動を加えたモデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_i(x,t) & = p_i(x,t) \\ \frac{d}{dt}p_i(x,t) & = (\Delta q_i)(x,t) + B\delta_{i,2}p_1(x) - B\delta_{i,1}p_2(x) + noise,\ i = 1,2 \end{cases}$$

を解析する。このような微視的モデルから空間-時間-ノイズに対するスケール極限を取ることで、中間視的 (mesoscopic) な熱の時間発展を表す方程式として線形ボルツマン方程式

$$\partial_t W(t,x,k,i) + \partial_k X'(k)\partial_x W(t,x,k,i) = CW(t,x,k,i),\ (t,x,k,i) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \{1,2\}$$
$$CW(t,x,k,i) = \sum_{j=1,2} \int_{\mathbf{T}} dk' \frac{X_i}{X_1+X_2}(k) R(k,k') \frac{X_j}{X_1+X_2}(k')(W(t,x,k',j) - W(t,x,k,i))$$

が導出される。$\mathbb{T}$ は一次元トーラス、$k \in \mathbb{T}$ は熱のフーリエモードである。更にこのボルツマン方程式の解に対して空間-時間に対するスケール極限を取ることで、その解は 5/6-分数階拡散方程式

$$\partial_t \mathbf{e}(u,t) = -(-\Delta)_u^{\frac{5}{6}} \mathbf{e}(u,t),\ (u,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

の解に収束することを示した。[4] の結果によってこのモデルでは熱の異常拡散が生じるであろうと予測されていたが、今回それを証明したことになる。特筆すべきこととしては、5/6 という新しい指数が得られたこと、磁場確率鎖モデルは磁場の効果により系全体の運動量を保存していないことがある。従って本研究は運動量保存と熱の異常拡散に関する仮説の非自明な反例にもなっている。

参考文献

[1] G. Basile, C. Bernardin, S. Olla : *Thermal Conductivity for a Momentum Conservative Model*. Comm. Math. Phys. **287**, 67-98 (2009)

[2] G. Basile, S. Olla, H. Spohn : *Energy transport in stochastically perturbed lattice dynamics*. Arch. Ration. Mech. **195**, 171–203 (2009)

[3] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *Superdiffusion of Energy in a Chain of Harmonic Oscillators with Noise*. Commun. Math. Phys. **339**, 407–453 (2015)

[4] K. Saito, M. Sasada : *Thermal conductivity for a stochastic dynamics in a magnetic field*

Characterization of the explosion time for the Komatu–Loewner evolution

Takuya Murayama (Kyoto University)

1 Introduction

The Komatu–Loewner equation is a correspondence to the Loewner equation in multiply connected domains. Bauer and Friedrich [1] established its concrete expression in standard slit domains of the upper half plane $\mathbb{H}$, and then, Chen, Fukushima et al. [2], [3], [4] investigated some properties of the Komatu–Loewner evolution generated by it.

In this talk, I shall give a behavior of the image domain at the explosion time of this evolution, which is a refinement of a part of the study in [1]. The proof is based on a probabilistic expression of the solution that was developed in [2], [3] and [4], together with a general theory of complex analysis.

2 Review on the Komatu–Loewner equation

We fix $N \in \mathbb{N}$. Let $C_j \subset \mathbb{H}$, $1 \leq j \leq N$, be horizontal slits (i.e., segments parallel to the real axis) and $K := \bigcup_{j=1}^{N} C_j$. We call a domain of the form $\mathbb{H} \setminus K$ a *standard slit domain*.

Take a simple curve $\gamma : [0, t_\gamma) \to \overline{D}$ satisfying $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$ and $\gamma(0, t_\gamma) \subset D$. For each $t \in [0, t_\gamma)$, there is a unique conformal map g_t from D onto another standard slit domain D_t with the *hydrodynamic normalization*

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \quad z \to \infty,$$

for some $a_t \geq 0$. The image $\xi(t) := g_t(\gamma(t))(= \lim_{z\to\gamma(t)} g_t(z)) \in \partial\mathbb{H}$ of the terminal point $\gamma(t)$ is called the *driving function* of g_t. The quantity a_t, called the *half plane capacity* of the set $\gamma[0,t]$ relative to g_t, is strictly increasing and continuous in t. Thus we can reparametrize the curve γ in such a way that $a_t = 2t$. Under these settings, $g_t(z)$ satisfies the following *Komatu–Loewner equation*:

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = -2\pi \Psi_{D_t}(g_t(z), \xi(t)), \quad g_0(z) = z \in D. \tag{1}$$

The function $\Psi_{D'}(\cdot, \xi_0)$, $\xi_0 \in \partial\mathbb{H}$, is a unique conformal map from D onto another slit domain $\tilde{D}$ with ∞ mapped to 0 and $\Psi_{D'}(z, \xi_0) \sim -\pi^{-1}(z-\xi_0)^{-1}$ as $z \to \xi_0$.

Since $\Psi_{\mathbb{H}}(z, \xi_0) = -\pi^{-1}(z-\xi_0)^{-1}$, the celebrated Loewner equation

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)}, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H},$$

corresponds to the Komatu–Loewner equation in $D = \mathbb{H}$.

Since the image D_t of g_t above changes as time passes, there is also an ODE describing the motion of the slits $C_{j,t}$ of D_t. We denote the left and right endpoints of $C_{j,t}$ by $z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$ and $z_j^r(t) = x_j^r(t) + iy_j(t)$, respectively. Then, they satisfy the *Komatu–Loewner equation for slits*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y_j(t) &= -2\pi \Im \Psi_{D_t}(z_j(t), \xi(t)), \\
\frac{d}{dt} x_j(t) &= -2\pi \Re \Psi_{D_t}(z_j(t), \xi(t)), \\
\frac{d}{dt} x_j^r(t) &= -2\pi \Re \Psi_{D_t}(z_j^r(t), \xi(t)).
\end{aligned} \tag{2}$$

We now follow this procedure in the opposite direction. Namely, for a continuous function $\xi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, we first solve the Komatu–Loewner equation (2) for slits. By doing so, the family $\{D_t\}$ are determined, and then we can solve (1) for $g_t(z)$, $z \in D$.

We denote by t_ξ the explosion time for the ODE (2).

$$t_z = t_\xi \wedge \sup\{t > 0; |g_t(z) - \xi(t)| > 0\}, \quad z \in D,$$

is the explosion time of $g_t(z)$. Putting $F_t := \{z \in D; t_z \leq t\}$, $t < t_\xi$, we can check that g_t, $t \in [0, t_\xi)$, is a unique conformal map from $D \setminus F_t$ onto D_t satisfying the hydrodynamic normalization with $a_t = 2t$.

The bounded set F_t is not necessarily a curve but a (compact) $\mathbb{H}$-*hull* in the sense that $F_t = \mathbb{H} \cap \overline{F_t}$ and that $\mathbb{H} \setminus F_t$ is simply connected. We call both g_t and F_t the *Komatu–Loewner evolution driven by* ξ.

3 Characterization of the explosion time

It is a natural problem what happens if t_ξ is finite. A reasonable guess is that the evolution F_t should hit the slits $\bigcup_j C_j$ at the time t_ξ. In terms of the slits $C_{j,t}$ of D_t, this means that $C_{j,t}$ is absorbed into the real axis for some j as claimed in [1, Theorem 4.1].

Justifying this description is, however, not so trivial. The endpoints $z_j(t)$ and $z_j^r(t)$ of the slits $C_{j,t}$ is merely the solution to the ODE (2), so, for some j, $C_{j,t}$ may degenerate to one point or collide with each other before reaching $\partial\mathbb{H}$.

Our main theorem settles this problem as follows:

Theorem 1. *If $t_\xi < \infty$, then*

$$\lim_{t \nearrow t_\xi} \min_{1 \leq j \leq N} \operatorname{dist}(C_{j,t}, \xi(t)) = 0. \tag{3}$$

The conclusion (3) obviously implies $\lim_{t \nearrow t_\xi} y_j(t) = 0$ for some j, which is exactly the observation by [1].

For the proof, we assume that the conclusion does not hold. It suffices to extend the solution $z_j(t)$ and $z_j^r(t)$ beyond t_ξ so that the corresponding $\{C_{j,t}\}$ still represent N disjoint slits in $\mathbb{H}$. To this end, we interpret the complicated evolution g_t and F_t in D as a simpler one g_t^0 and F_t in $\mathbb{H}$, which is the method essential in [4]. g_t^0 and F_t extend to a Loewner evolution in $\mathbb{H}$ over the time interval $[0, t_\xi]$. Then, by a version of Carathéodory's kernel theorem (cf. [5, Theorem 15.4.7]), $\{g_t \circ (g_t^0)^{-1}; t < t_\xi\}$ extends to a family of conformal maps over $[0, t_\xi]$. This implies that the limits $z_j(t_\xi)$ and $z_j^r(t_\xi)$ still represent N slits in $\mathbb{H}$. We are thus led to a contradiction.

If time permits, I shall also explain the finite time explosion of the *stochastic Komatu–Loewner evolution* (SKLE) for specific parameters.

We define the *domain constant* k as

$$k(D, \xi_0) := 2\pi \lim_{z \to \xi_0} \left(\Psi_D(z, \xi_0) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{z - \xi_0} \right), \quad \xi_0 \in \partial\mathbb{H}.$$

$\mathrm{SKLE}_{\sqrt{6},k}$ is a Komatu–Loewner evolution driven by the random function ξ determined by the system of SDEs (2) and

$$d\xi(t) = -k(D_t, \xi(t))dt + \sqrt{6}dB_t \tag{4}$$

where B_t is a one-dimensional standard Brownian motion.

Proposition 2. *Let ζ be the explosion time for the SDEs* (2) *and* (4)*. It holds that $\zeta < \infty$ almost surely.*

Proposition 2 is proven by interpreting SLE_6 as $\mathrm{SKLE}_{\sqrt{6},k}$ similarly to the proof of Theorem 1.

References

[1] R. O. Bauer and R. M. Friedrich, On chordal and bilateral SLE in multiply connected domains, Math. Z. **258** (2008), 241–265.

[2] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, Stochastic Komatu–Loewner evolutions and BMD domain constant, to appear in Stoch. Proc. Appl., arXiv:1410.8257v2.

[3] Z.-Q. Chen, M. Fukushima and S. Rohde, Chordal Komatu–Loewner equation and Brownian motion with darning in multiply connected domains, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 4065–4114.

[4] Z.-Q. Chen, M. Fukushima and H. Suzuki, Stochastic Komatu–Loewner evolutions and SLEs, Stoch. Proc. Appl. **127** (2017), 2068–2087.

[5] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable II, Graduate Texts in Mathematics, vol. 159, Springer-Verlag, New York, 1995.

Loewner-Kufarev 方程式の連続率について

天羽 隆史[♭](福岡大学)

原点を含み、連続的に増大していく複素平面内の単連結領域の族は C. Loewner, P. P. Kufarev そして C. Pommerenke による理論の整備を経て、対応する Riemann 写像 (の逆写像) が Loewner(-Kufarev) 方程式と呼ばれる偏微分方程式によって記述されることが知られている。この考え方は I. Markina と A. Vasil'ev によって、必ずしも単調増大とは限らない単連結領域の族の発展を記述する alternate Loewner-Kufarev 方程式へと拡張された。今回の講演ではそれをさらに拡張する形で、無限個の道を駆動関数に持つような制御型の Loewner-Kufarev 方程式を導入する。このとき、この解の時間に関する連続率が記述し易い駆動関数のクラスを一つ紹介する。

本講演は Roland Friedrich 氏 (Saarland university) との共同研究に基づく。

E-mail address: (T. Amaba) fmamaba@fukuoka-u.ac.jp

[♭]This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15K17562.

Radial processes on $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ spaces

Kazumasa Kuwada and Kazuhiro Kuwae
(Tohoku University and Fukuoka University)

1 $\mathsf{RCD}^*(K,N)$-space

Let $\mathcal{C}^{\mathrm{Lip}}(X)$ be the set of Lipschitz functions on X. Let $\mathsf{Ch} : L^2(X;\mathfrak{m}) \to [0,\infty]$ be given by

$$\begin{aligned}\mathsf{Ch}(f) :=& \frac{1}{2}\inf\left\{ \varliminf_{n\to\infty}\int_X |Df_n|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \;\middle|\; f_n \in \mathcal{C}^{\mathrm{Lip}}(X)\cap L^2(X;\mathfrak{m}), f_n \to f \text{ in } L^2(X;\mathfrak{m})\right\},\\ \mathcal{D}(\mathsf{Ch}) :=& \{f \in L^2(X;\mathfrak{m}) \mid \mathsf{Ch}(f) < \infty\},\end{aligned}$$

where $|Dg| : X \to [0,\infty]$ is local Lipschitz constant of $g : X \to \mathbb{R}$ defined by

$$|Dg|(x) := \varlimsup_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}.$$

For $f \in L^2(X;\mathfrak{m})$ with $\mathsf{Ch}(f) < \infty$, we have $|Df|_w \in L^2(X;\mathfrak{m})$ such that

$$\mathsf{Ch}(f) = \frac{1}{2}\int_X |Df|_w^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{1.1}$$

We call $|Df|_w$ minimal weak upper gradient of f. To state the precise definition of $|Df|_w$, we need some notions in optimal transport. We call $(X,d,\mathfrak{m})$ to be *infinitesimally Hilbertian*, if Ch satisfies the parallelogram law. Note that minimal weak upper gradients also satisfies the parallelogram law if $(X,d,\mathfrak{m})$ is infinitesimally Hilbertian. It means that there exists a bilinear form $\langle D\cdot, D\cdot\rangle : \mathcal{D}(\mathsf{Ch})\times\mathcal{D}(\mathsf{Ch}) \to L^1(X;\mathfrak{m})$ such that $\langle Df, Df\rangle = |Df|_w^2$. We denote the (non-positive definite) selfadjoint operator associated with $2\mathsf{Ch}$ by Δ. Throughout my talk, we will assume $K \in \mathbb{R}$ and $N \in [1,\infty[$.

Definition 1.1 *We call that $(X,d,\mathfrak{m})$ is an $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ space if it satisfies the following conditions:*

(i) $(X,d,\mathfrak{m})$ *is infinitesimally Hilbertian.*

(ii) *There exists $x_0 \in X$ and a constant $c, C > 0$ such that $V_r(x_0) \le C\mathrm{e}^{cr^2}$.*

(iii) *If $f \in \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ satisfies $|Df|_w \le 1$ $\mathfrak{m}$-a.e., then f has a 1-Lipschitz representative.*

(iv) *For any $f \in \mathcal{D}(\Delta)$ with $\Delta f \in \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ and $g \in \mathcal{D}(\Delta)\cap L^\infty(X;\mathfrak{m})$ with $g \ge 0$ and $\Delta g \in L^\infty(X;\mathfrak{m})$,*

$$\frac{1}{2}\int_X |Df|^2\Delta g\,\mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_X \langle Df, D\Delta f\rangle g\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \ge K\int_X |Df|_w^2 g\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + \frac{1}{N}\int_X (\Delta f)^2 g\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

2 Main Results

For $p \in X$, let the radial function $r_p : X \to \mathbb{R}$ be given by $r_p(x) := d(p,x)$. Let $\kappa := \frac{K}{N-1}$ if $N > 1$, $:= 0$ if $N = 1$, and $\mathfrak{s}_\kappa(t) := \sin(\sqrt{\kappa}t)/\sqrt{\kappa}$ and $\cot_\kappa(t) := (\log \mathfrak{s}_k(t))' = \mathfrak{s}_k'(t)/\mathfrak{s}_k(t)$. We interpret $\mathfrak{s}_0(t)$ as $\lim_{\kappa\to 0}\mathfrak{s}_\kappa(t)(= t)$.

Let $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{M}, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in X})$ with a filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ be the diffusion process canonically associated with $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Let σ_p be the first hitting time of $\mathbf{X}$ to $\{p\}$. Our main theorem is a stochastic expression of the radial process $r_p(X_t)$. A simplified version can be stated as follows:

Theorem 2.1 (Stochastic expression of radial process)

(i) *For the part process $\mathbf{X}_{X\setminus\{p\}}$ of $\mathbf{X}$ on $X \setminus \{p\}$, there exists a positive continuous additive functional A_t in the strict sense and a one-dimensional standard Brownian motion B such that*

$$r_p(X_t) - r_p(X_0) = \sqrt{2}B_t + (N-1)\int_0^t \cot_\kappa \circ r_p(X_s)\,\mathrm{d}s - A_t \tag{2.1}$$

holds for all $t \in [0, \sigma_p[$ $\mathbb{P}_x$-a.s. for all $x \in X \setminus \{p\}$.

(ii) *If the condition* (R2) *below is satisfied, then (i) holds for X in place of $X\setminus\{p\}$ and* (2.1) *holds for all $t \in [0, \infty[$ $\mathbb{P}_x$-a.s. for every $x \in X$. In particular, $f(r_p(X_t))$ is a semimartingale.*

Definition 2.2 *We say that $p \in X$ satisfies the condition* (R1) *if $r_p^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(X;\mathfrak{m})$. We say that $p \in X$ verifies the condition* (R2) *if there exist $\xi_0 > 0$ and $C_{\xi_0} > 0$ such that*

$$\frac{1}{\mathfrak{m}(B_\xi(p))}\int_{B_\xi(p)} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{r_p} \leq \frac{C_{\xi_0}}{\xi}$$

for any $\xi \in]0, \xi_0[$. Note that (R2) *immediately implies* (R1).

Lemma 2.3 *Suppose $N > 1$ and that there exists $C_V > 0$ and $\delta > 0$ such that $\mathfrak{m}(B_r(p)) \leq C_V r^N$ holds for $r \in [0, \delta[$. Then $p \in X$ satisfies the condition* (R2).

Note that this sufficient condition holds for any $p \in X$ on N-dimensional Alexandrov spaces equipped with N-dimensional Hausdorff measure with $N \geq 2$.

Assumption 1 $E_1 = \emptyset$.

Here E_1 is the 1-dimensional part of the $\mathsf{RCD}^*(K,N)$-space. If $E_1 \neq \emptyset$, then $X = E_1$ (see [2]).

Theorem 2.4 *Suppose Assumption 1. Then $\{p\}$ is polar for $\mathfrak{m}$-a.e. $p \in X$.*

Proposition 2.5 *Suppose Assumption 1. Then $\mathfrak{m}$-a.e. $p \in X$ satisfies* (R2).

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[2] Y. Kitabeppu and S. Lakzian, *Characterization of low dimensional RCD*$^*(K,N)$ *spaces*, Anal. Geom. Metr. Spaces **4** (2016), 187–215.

[3] K. Kuwada and K. Kuwae, *Radial processes on* $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ *spaces*, preprint, 2017.

Unimodality for stochastic processes in classical and free probability

確率論シンポジウム 2017
平成 29 年 12 月 11 日 (月)-12 月 15 日 (金)
東北大学片平キャンパスさくらホール

北海道大学大学院理学院 数学専攻
博士課程 1 年 植田 優基

本講演で話す研究内容は, 長谷部 高広氏 (北海道大学) との共同研究である ([3]). ここでは大まかに, 概念の定義と研究問題について解説する.

1 単峰性の定義

1 次元確率分布 μ がモード $c \in \mathbb{R}$ の単峰であるとは, μ が以下のように表示されることをいう.

$$\mu = \mu(\{c\})\delta_c + f(x)dx,$$

ただし $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は $(-\infty, 0)$ 上で単調非減少, $(0, \infty)$ 上で単調非増加な関数である. 値 $\mu(\{c\})$ は 0 となることもある. 分布の単峰性は, 分布の散布度, 歪度などの分布に現れる統計的特性を統計指標で要約するために必要な性質である.

2 1 次元ブラウン運動と 1 次元自由ブラウン運動の単峰性

ある確率空間上で定義された連続確率過程 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ が 1 次元 (古典) ブラウン運動であるとは,
(1) $B_0 = 0$, a.s.,
(2) 任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立,
(3) 任意の $0 \leq t < s$ に対し, $B_s - B_t$ は正規分布 $N(0, t - s)$ に従う.
をみたすことをいう. 定義からわかる通り, 1 次元ブラウン運動をなす分布族は正規分布族であり, 正規分布 $N(0, t)$ はすべての t でモード 0 の単峰分布となる. 従って 1 次元ブラウン運動は全ての時刻で単峰である.

同様に, ある (非可換) 確率空間上で定義された確率過程 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ が 1 次元自由ブラウン運動であるとは,
(1) $W_0 = 0$,
(2) 任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ は自由独立,
(3) 任意の $0 \leq t < s$ に対して, $W_s - W_t$ は分散 $s - t$ の標準ウィグナー半円分布 $S(0, t)$ に従う.
をみたすことをいう. ここで非可換確率空間とは, ある $\mathbb{C}$ 上 $*-$ 代数とその上の状態と呼ばれる線形汎関数の組を表しており, その $*-$ 代数の元の事を確率変数と呼ぶ. ”自由独立”と”従う”の定義はここでは省略するが, いずれも非可換確率論の枠組みで定義されたもので, 確率論における”独立”, ”従う”の類似の概念となっていることに注意する. また分散 t の標準ウィグナーの半円分布とは以下のような連続密度関数をもつ確率分布のことである.

$$\frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2} \cdot 1_{[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1 次元自由ブラウン運動をなす分布族はウィグナーの半円分布族であり, $S(0, t)$ はすべての t でモード 0 でコンパクトサポートをもつ単峰分布となる. したがって自由ブラウン運動もまた全ての時刻で単峰であるといえる.

なおブラウン運動は安定過程, 自己分解可能過程, そしてレヴィ過程の代表的な例であり, より一般に安定過程, 自己分解可能過程, レヴィ過程の単峰性に関しては主に山里, 渡辺, Wolfe ([4], [5], [6]) らを中心に研究されてきた. 同様にこれらの自由版の単峰性についても, 主に長谷部, 佐久間, Thorbjørnsen ([1],[2]) らによって研究されてきた.

3　初期分布付き古典・自由ブラウン運動の単峰性についてと研究問題

ブラウン運動は古典の場合も自由の場合も, 確率過程を分布族としてみれば, その初期分布は 0 でのデルタ分布 δ_0 である．この初期分布をデルタ分布でない適当な確率分布 μ に変更する (ただし時刻 0 での確率変数は全ての B_t と独立, W_t と自由独立になるようにとる) ときに得られる確率過程をなす分布族は, 古典の場合では $\mu * N(0,t)$, 自由の場合では $\mu \boxplus S(0,t)$ である．ここで $*$ は分布のたたみこみ, $\boxplus$ は分布の自由たたみ込みを表す記号である．このとき, これらの初期分布付きブラウン運動の単峰性は初期分布 μ に依存しており, 一般にはすべての時刻で単峰ではなくなる．例えば $\mu = \frac{1}{2}\delta_{+1} * \frac{1}{2}\delta_{-1}$(対称ベルヌーイ分布) と取れば, $\mu * N(0,t)$ は $t \geq 1$, $\mu \boxplus S(0,t)$ は $t \geq 4$ で単峰になる (自由の場合は Figure 1-6)．我々の問題点は, 初期分布がどのようなクラスであれば, これらの初期分布付き古典・自由ブラウン運動が
(1) すべての時刻で単峰になるか,
(2) 十分大な時刻で単峰になるか,
(3) すべての時刻で単峰にならないか,
について考察することであり, 本講演ではこの問題に対する研究結果について解説する予定である．

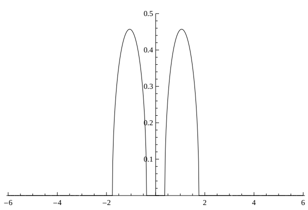

Figure 1: $\mu \boxplus S(0, 0.25)$

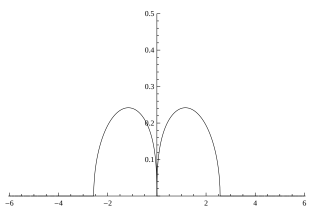

Figure 2: $\mu \boxplus S(0, 1)$

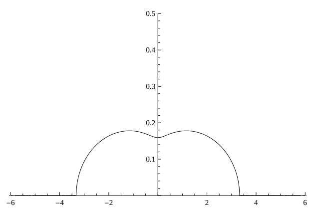

Figure 3: $\mu \boxplus S(0, 2)$

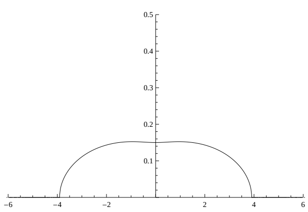

Figure 4: $\mu \boxplus S(0, 3)$

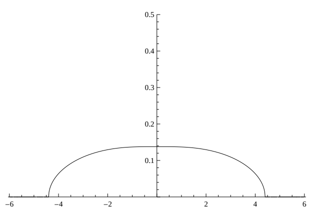

Figure 5: $\mu \boxplus S(0, 4)$

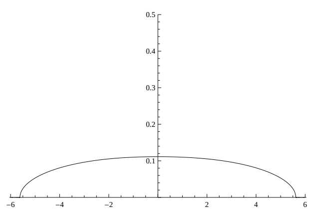

Figure 6: $\mu \boxplus S(0, 7)$

References

[1] T. Hasebe and N. Sakuma, Unimodality for free Lévy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **53** (2017), no. 2, 916–936.

[2] T. Hasebe and S. Thorbjørnsen, Unimodality of the freely selfdecomposable probability laws, J. Theoret. Probab. **29** (2016), no. 3, 922-940.

[3] T. Hasebe, Y. Ueda, Large time unimodality for classical and free Brownian motions with initial distributions, e-print, arXiv:1710.08240,

[4] T. Watanabe, On the strong unimodality of Lévy processes, Nagoya Math. J. Vol. **121** (1991), 195-199.

[5] S.J. Wolfe, On the unimodality of infinitely divisible distribution functions, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **45** (1978), 329-335.

[6] M. Yamazato, Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L, Ann. Probab. **6**, 523–531 (1978).

Approximation and duality problems about refracted processes

野場 啓 (京都大学大学院理学研究科)

1　序

X と Y を正の跳びを持たない標準過程とし, 正の値をとるとき X の, 負の値をとるとき Y の挙動をする確率過程 U のことを X と Y の**屈折過程**と呼ぶことにする. X と Y がいずれも Lévy 過程で X と Y の違いがドリフトのみの場合に, Kyprianou–Loeffen(2010) は屈折過程 U を, 確率微分方程式を用いて定義した. また, X と Y がいずれも正の跳びを持たない Lévy 過程で X と Y の Lévy 測度が異なり X がガウス部分を持たない場合について, Noba–Yano(arXiv, 2016) は屈折過程 U を周遊理論を用いて構成した. 本講演では一般の正の跳びを持たない標準過程 X と Y に対して, 屈折過程 U を**周遊理論**を用いて構成し, その性質を論じる.

X と Y を正の跳びを持たない Lévy 過程とし, U を周遊理論を用いて構成される屈折過程とする. このとき, 複合 Poisson 過程の列 $\{X^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{Y^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ から構成される屈折過程の列 $\{U^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で, U に分布の意味で収束するものを構成したい. Noba–Yano(arXiv, 2016) は, X がガウス部分を持たない場合について, 上記のような近似問題を論じた. 本講演では, X と Y を一般の正の跳びを持たない Lévy 過程とし, X と Y の接合部を関数で変化させる場合について, 近似問題を論じる.

X と Y を正の跳びを持たない標準過程で, それぞれ双対な過程 $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ を持つとする. $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ は負の跳びを持たない標準過程となるため, $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ から屈折過程 $\widehat{U}$ を構成することができる. このとき, U と $\widehat{U}$ が双対の関係にあることは明らかではない. 本講演では, U と $\widehat{U}$ が双対であるための, U と $\widehat{U}$ の必要十分条件について論じる. その際, **一般化スケール関数**を用いる.

正の跳びを持たない Lévy 過程に対しスケール関数が存在して, 到達時刻の Laplace 変換や吸収壁ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表わせることが知られている (詳しくは Kyprianou(2014) を見よ). 本講演では正の跳びを持たない Lévy 過程のスケール関数を, 正の跳びを持たない標準過程に拡張し, 一般化スケール関数と呼ぶことにする.

本講演は以下の二つの論文に基づいたものであり, 一般化スケール関数の定義, 屈折過程の構成, 屈折過程の近似問題, 屈折過程の双対問題について順に述べていく. 予稿では, 屈折過程の定義についてのみ述べる.

[1] K. Noba. Approximation and duality problems about refracted processes. In preparation.

[2] K. Noba. Generalized scale functions of standard processes with no positive jumps. In preparation.

2　屈折過程

$\mathbb{R}$ 値確率過程 Z と $x \in \mathbb{R}$ に対し, 以下のように到達時刻を定義する:

$$T_x^-(Z) := \inf\{t > 0 : Z_t \leq x\}, T_x(Z) := \inf\{t > 0 : Z_t = x\}. \tag{2.1}$$

考える確率過程が明らかな場合は, 単に T_x^-, T_x と書く.

X を以下の条件を満たす, 正の跳びを持たない $\mathbb{R}$ 値標準過程とする:

(A1) $(x, y) \mapsto \mathbb{E}_x^X\left[e^{-T_y}\right] > 0$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測関数.

(A2) X は m_X を reference measure に持つ.

(A3) X Feller 性を持つ.

ただし, $\mathbb{P}_x^X$ は x を出発する X の法則である. また, Y は (A1), (A3) と持ち, reference measure に m_Y を持つ, 正の跳びを持たない $\mathbb{R}$ 値標準過程とする. n_0^X と n_0^Y を, それぞれ X と Y の 0 での周遊測度とする. ただし, 0 が自身に irregular な場合は, 0 を出発し 0 で停止する確率過程の法則を定数倍したものを周遊測度と呼ぶことにする.

関数 $\psi : (0, \infty) \times (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$ は

$$n_0^X\left[1 - e^{-T_0^-}\mathbb{E}^Y_{\psi(X_{T_0^- -}, X_{T_0^-})}\left[e^{-T_0}\right] : 0 < T_0^- < T_0\right] < \infty \tag{2.2}$$

を満たすものとする. この ψ は**着地関数**と呼ぶことにする.

周遊測度 n_0^U を以下のように定義する: すべての非負可測汎関数 F に対し,

$$\begin{aligned} n_0^U[F(U)] = {} & c_0 n_0^Y\left[F(Y) : T_0^- = 0\right] \\ & + n_0^X\left[\mathbb{E}^{Y^0}_{\psi(X_{T_0^- -}, X_{T_0^-})}[F(\omega \circ Y)]\,\big|_{\omega = k_{T_0^-}X} : 0 < T_0^- < T_0\right] \\ & + n_0^X\left[F(X) : T_0^- = T_0\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

を満たす. ただし, c_0 は非負な実数で, X について 0 が自身に対して irregular な場合, もしくは Y について 0 が $(-\infty, 0)$ に対して irregular な場合は $c_0 = 0$ を満たす. また,

$$k_{T_0^-}X_t = \begin{cases} X_t & , t < T_0^-, \\ \partial & , t \geq T_0^-, \end{cases} \qquad \omega \circ Y_t = \begin{cases} \omega(t), & t < \zeta(\omega), \\ Y_{t - \zeta(\omega)}, & t \geq \zeta(\omega). \end{cases} \tag{2.4}$$

である. 周遊測度 n_0^U と同様に, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を出発し 0 で停止する確率過程の法則 $\mathbb{P}_x^U$ も定義する. 周遊理論を用いて, 周遊測度 n_0^U と停止過程の法則 $\mathbb{P}_x^U$ を持つ右過程 U を構成する.

補題 2.1. 右過程 U は Feller 性を持つ. よって U は標準過程である.

Cutoff for lamplighter chains on fractals

中村ちから [*]
(Amir Dembo 氏 [†]、 熊谷隆氏 [‡]との共同研究)

November 9th, 2017

本講演ではランプライターランダムウォーク (lamplighter random walk) のカットオフ現象について議論する。グラフ G 上のランプライターグラフとは G の各頂点にランプ (=$\{0,1\}$) を付加してできるグラフ ($\mathbb{Z}_2 \wr G$ とかかれる) であり、ランプライターランダムウォークは通常のランダムウォークの動きにさらにランダムにランプの on/off の操作を加えたものであり、(離散) 群上のランダムウォークの枠組みで活発に研究されている。カットオフ現象とは、(有限) マルコフ連鎖の分布が 「急速に」 不変分布に収束する現象のことであり、有限マルコフ連鎖の理論の中で中心的な問題の一つである。

近年、ランダムウォークが訪れにくい点 (late point) の研究が活発になされているが、過渡的なランダムウォーク (例えば $\mathbb{Z}^d (d \geq 3)$ 上のランダムウォーク) の late point たちにはあまり相関がない、という性質を、ランプライターランダムウォークの混合時間 (mixing time) やカットオフ現象 (cutoff phenomenon) の理論の枠組みで定量的に扱うという試みがなされている ([2]、また非常に関連するものとして [3])。本講演では、過渡的な場合だけでなく (強) 再帰的な場合 (典型的な例としてフラクタル上のランダムウォーク) も含めて、ランプライターランダムウォークの混合時間やカットオフ現象を議論する。

我々の主結果は、以下のランプライターランダムウォークのカットオフ現象に関する両分である。

Theorem 1 (Dembo, Kumagai and N. [1])**.** *有限グラフの列 $\{G^{(N)}\}_N$ は、(i) d_f-set 条件 ($c^{-1}r^{d_f} \leq \sharp B^{(N)}(x,r) \leq cr^{d_f}$) と (ii) (uniform) parabolic Harnack 不等式を満たすと仮定する。このとき、*

(a) もし $\{G^{(N)}\}_N$ が強再帰的なら、ランプライターランダムウォークはカットオフをもたない。

(b) もし $\{G^{(N)}\}_N$ が過渡的なら、ランプライターランダムウォークは $\frac{1}{2}T_{\mathrm{cov}}(G^{(N)})$ を閾値としてカットオフをもつ。(但し $T_{\mathrm{cov}}(G^{(N)})$ は期待被覆時間を表す。)

我々の本質的な貢献は (a) の場合である。(a) が従う本質的な理由は、ランダムウォークが強再帰的な場合は被覆時間がその平均に集中 (concentrate) していない、ということであるのに対し、(b) が従う本質的な理由は被覆時間がその平均に集中している、ということである。講演では、(a) の場合になぜ被覆時間が重要になるかのアイデアを共有することを試み、時間に余裕があれば (b) や late point との関連に言及する。

References

[1] A. Dembo, T. Kumagai and C. Nakamura, Cutoff for lamplighter chains on fractals. Preprint, available at `arXiv:1711.02788`.

[2] J. Miller and Y. Peres, Uniformity of the uncovered set of random walk and cutoff for lamplighter chains. Ann. Probab. 40 (2012), no. 2, 535–577.

[3] J. Miller and P. Sousi, Uniformity of the late points of random walk on Z_n^d for $d \geq 3$. Probab. Theory Related Fields 167 (2017), no. 3-4, 1001–1056.

[*]京都大学理学研究科・数学数理解析専攻, `e-mail: chikaran@kurims.kyoto-u.ac.jp`
[†]Department of Statistics, Stanford University
[‡]京都大学数理解析研究所

行列式点過程の離散化とベルヌイ性

Shota OSADA
Kyushu University, s_osada@outlook.com

1. 導入

確率空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ と，$G = \mathbb{Z}^d$ または $\mathbb{R}^d$ が作用する保測変換 $\mathsf{T}_G = \{\mathsf{T}_g : g \in G\}$ の組を保測力学系と呼ぶ．$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ がベルヌイシフトであるとは，直積確率空間とその上のシフトと同型になることである．また $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ がベルヌイフローであるとは，変換を $\mathbb{Z}^d$ 作用に制限した $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ がベルヌイシフトになることである．本講演ではこれらを単にベルヌイ性と呼ぶことにする．

離散行列式点過程のベルヌイ性 [2] は既に知られていたが，連続の場合は未解決であった．本講演では，R.Lyons-J.Steif [2] による $\mathbb{Z}^d$ 上の定常行列式点過程のベルヌイ性を連続に持ち上げ，この問題を解決する．証明では，まず [3] で導入した行列式点過程の離散近似に対してベルヌイ性を示す．更に，Ornstein の同型理論における諸定理により連続空間に持ち上げることで，連続空間の行列式点過程のベルヌイ性を証明する．

行列式点過程とはその（Lebesgue 測度に対する）相関関数 ρ^n が、核関数 K の行列式で与えられる点過程である:

$$\rho^n(x_1, \ldots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

$\mathbb{R}^d$ 上の平行移動不変な核関数 $K(x, y) = k(x - y)$ をもつ行列式点過程は平行移動不変となる．本講演ではこのような行列式点過程に対して，ベルヌイ性を示す．このベルヌイ性は [3] で示した tail 自明性よりも真に強い性質である．

2. 設定

確率空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$，$(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu)$ が同型であるとは確率 1 の集合 $\mathcal{X}_0$ と $\mathcal{Y}_0$ の間の全単射 φ が存在して，$\mu \circ \varphi^{-1} = \nu$ となることである．また，保測力学系 $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_G)$，$(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_G)$ が同型であるとは確率空間の同型 φ が存在して $\varphi \circ \mathsf{T}_g = \mathsf{U}_g \circ \varphi$（${}^\forall g \in G$）となることである．

保測力学系の同型においてエントロピーは不変量であるが，一般には完全不変量ではない．Ornstein は 1969 年に $d = 1$ のベルヌイシフトにおいてエントロピーが完全不変量となることを示した．その後 Ornstein 同型理論は従順群が作用する変換の場合にまで拡張された [4]．本講演では $\mathbb{Z}^d$ または $\mathbb{R}^d$ が作用する場合のみを扱う．また以下に述べる定理では確率空間が $[0, 1]$ 上のルベーグ測度に同型であるとする．

核関数 $K(x, y) = k(x - y)$ を，k が $[0, 1]$ に値を取る関数 $\hat{k} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のフーリエ変換

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x \cdot t} \hat{k}(t) dt$$

で与えられるものとする．例えば，$k(x) = \frac{\sin x}{x}$ が典型例である．このとき相関関数が K の行列式で与えられる平行移動不変な点過程 $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ が一意に定まる [5][6]．ここで，$\mathbb{R}^d$ 上の非負整数値ラドン測度 $\mathrm{x} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{x_i}(\cdot)$ を配置と呼び，$\mathcal{X}$ は配置全体とする．$\mathcal{X}$ には漠位相が入り，$\mathcal{F}$ はそのボレル集合族である．配置の平行移動を $\mathsf{T}_{\mathbb{R}^d}$ とする．次が本講演で示す主定理である．

定理 1 (主定理)**.** $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ はベルヌイフローである．

3. ξ_n-商変換 $(\mathcal{Z}, \mathcal{H}, \bar{\mu}, \mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d})$ と離散近似 $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$

Ornstein の同型理論において，次の定理が知られている．

定理 2 (Ornstein)**.** $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ の $\mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d}$-不変な可測分割の列 $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ で，各 ξ_n-商変換がエントロピー有限なベルヌイシフトである時，その細分 $\xi = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \xi_n$ による商変換はベルヌイシフトである．

$\mathbb{R}^d$ の分割 $X_n := \{\prod_{i=1}^d [z_j, z_j + \frac{1}{2^{n-1}}) : z \in \frac{1}{2^{n-1}} \mathbb{Z}^d\}$ に対し，$\mathcal{X}$ の分割を

$$\xi_n := \bigvee_{A \in X_n} \{\{\mathrm{x} \in \mathcal{X}; \mathrm{x}(A) = m\} : m \in \mathbb{N}_0\}$$

で定めると，定理 2 より，$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ のベルヌイ性は $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ の ξ_n-商変換のベルヌイ性に帰着される．以下の議論は n に依らないので，ξ_1 の場合について述べる．

$\mathcal{F}_1 := \sigma[\{\mathrm{x} \in \mathcal{X}; \mathrm{x}(A) = m\} : m \in \mathbb{N}_0, A \in X_1]$ による条件付確率 $\mu(\cdot|\mathcal{F}_1)$ は $A \leftrightarrow z$ の対応で $\mathbb{Z}^d$ 上の平行移動不変な点過程とみなせる．平行移動を $\mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d}$ としこの保測力学系を $(\mathcal{Z}, \mathcal{H}, \bar{\mu}, \mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d})$ とおく．これは $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{Z}^d})$ の ξ_1-商変換である．

$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ から $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の特別な正規直交基底 $\Phi = \{\phi_{(z,n)} : (z, n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}\}$ を構成することで，そのラベル上の核関数

$$\mathbb{K}\big((z, n), (z', n')\big) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x, y)\phi_{(z,n)}(x)\overline{\phi_{(z',n')}(y)}dxdy$$

は $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ 上の離散行列式点過程を決定する．K の平行移動不変性より，この点過程は $\mathbb{Z}^d$ 方向に関して平行移動不変である．平行移動を $\mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d}$ としこの保測力学系を $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ とおく．

$\mathbb{N}$ 方向の配置の射影を $\Pi : \mathsf{Conf}(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}) \to \mathsf{Conf}(\mathbb{Z}^d)$ と置くと，$\bar{\mu} \circ \Pi^{-1} = \nu$ となる．従って，$\bar{\mu}$ は ν の商変換となる．ここで Ornstein の同型理論において，次の定理が知られている．

定理 3 (Ornstein)**.** ベルヌイシフトの任意の自明でない商変換はベルヌイシフトである．

定理 3 より，$(\mathcal{Z}, \mathcal{H}, \bar{\mu}, \mathsf{V}_{\mathbb{Z}^d})$ のベルヌイ性は離散化 $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ のベルヌイ性に帰着される．

補題 1. $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ がベルヌイシフトであれば，$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, \mathsf{T}_{\mathbb{R}^d})$ はベルヌイフローである．

4. 離散近似 $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \nu, \mathsf{U}_{\mathbb{Z}^d})$ のベルヌイ性

$\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ の分割 $Y_n := \big\{\{z\} \times \{1\}, \ldots, \{z\} \times \{n\}, \{z\} \times \{n, n+1. \ldots\} : z \in \mathbb{Z}^d\big\}$ に対し，$\mathcal{Y}$ の分割を

$$\eta_n := \bigvee_{A \in Y_n} \big\{\{\mathrm{y} \in \mathcal{Y}; \mathrm{y}(A) = 0\}, \{\mathrm{y} \in \mathcal{Y}; \mathrm{y}(A) \geq 1\}\big\}$$

で定めると，定理 2 より η_n-商変換がベルヌイであることを示せば補題 1 が示される．この η_n-商変換は $\mathbb{Z}^d$ 不変な有限スピン系と見なせる．$\mathbb{Z}^d$ 不変な有限スピン系では，原点でのハミング距離の 1 次の Wasserstein 距離を $\bar{d}$ 距離と呼び，次の定理が知られている．

定理 4. (Ornstein) $\mathbb{Z}^d$ 不変な有限スピン系においてベルヌイ性は $\bar{d}$ 距離で閉じている．

[2] と同様に核関数 K のフーリエ変換の構造から η_n-商変換のベルヌイシフトによる $\bar{d}$ 近似を構成し，単調カップリングにより $\bar{d}$ での収束を評価する．定理 4 より η_n-商変換のベルヌイ性が示される．

参考文献

[1] Lyons, R. : Determinantal probability measures, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98** (2003), 167-212.

[2] Lyons, R., and Steif, J. E. :Stationary determinantal processes: phase multiplicity, bernoullicity, and domination, Duke Math. J. Volume 120, Number 3 (2003), 515-575.

[3] Osada, H., Osada, S. :Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and the tail triviality, (preprint)

[4] Ornstein, D. S. and Weiss, B. : Entropy and isomorphism theorems for the action of an amenagle group, Journal d'Analyse Mathematique, 48 (1987), 1-141.

[5] Soshnikov A. : Determinantal random point fields, Russian Math. Surveys **55** (2000), 923–975.

[6] Shirai T., and Takahashi Y. : Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: Fermion, Poisson and Boson processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

Poisson statistics for Gaussian beta ensembles at high temperature

Fumihiko Nakano[1] and Khanh Duy Trinh[2]

[1]Department of Mathematics, Gakushuin University
[2]Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Let $T_{n,\beta}, (n \in \{1, 2, \dots\}, \beta > 0)$ be a symmetric tridiagonal matrix whose entries are independent (up to the symmetric constraint) and are distributed as

$$T_{n,\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\beta}} \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & & \\ \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-2)\beta} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \tilde{\chi}_{\beta} & \mathcal{N}(0,1) \end{pmatrix}.$$

Here $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ denotes the Gaussian distribution with mean μ and variance σ^2, and $\tilde{\chi}_k$ denotes the distribution of the square root of the gamma distribution with parameters $(k/2, 1)$. Then the eigenvalues $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ of $T_{n,\beta}$ have the following joint density

$$p_{n,\beta}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \propto \prod_{i<j} |\lambda_j - \lambda_i|^\beta e^{-\frac{n\beta}{4}(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)},$$

which is referred to as Gaussian beta ensembles. These models were introduced in [2]. For $\beta = 1, 2$ and 4, they recover the well-known Gaussian orthogonal/unitary/symplectic ensembles, respectively.

Let

$$L_{n,\beta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\lambda_j},$$

with δ_λ being a Dirac measure, be the empirical distribution of $T_{n,\beta}$. For fixed β, the empirical distribution $L_{n,\beta}$ converges to the semicircle distribution, which is well known as Wigner's semicircle law. However, Wigner's semicircle law is not restricted to the case of fixed β. A complete description of the global law for Gaussian beta ensembles can be found in [5].

Theorem 1 (Global law). (i) *As $n \to \infty$ with $n\beta \to \infty$, the empirical distribution $L_{n,\beta}$ converges weakly to the semicircle distribution, almost surely. This means that for any bounded continuous function f, almost surely,*

$$\int f(x) dL_{n,\beta}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \to \int_{-2}^2 f(x) \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2\pi} dx.$$

(A probability measure with density $(2\pi)^{-1}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$ is called the semicircle distribution.)

(ii) *As $n \to \infty$ with $n\beta \to 2\alpha \in (0, \infty)$, the empirical distribution $L_{n,\beta}$ converges weakly to a measure ν_α, almost surely. Here the density of ν_α is given by $\nu_\alpha = \sqrt{\alpha}\bar{\mu}_\alpha(\sqrt{\alpha}x)$ with*

$$\bar{\mu}_\alpha(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\hat{f}_\alpha(x)|^2}, \text{ where } \hat{f}_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\frac{t^2}{2} + ixt} dt.$$

A central limit theorem is also investigated. Refer to [5] and the references therein for more details.

The aim of this talk is to show the Poisson statistics for bulk statistics as $n\beta \to 2\alpha \in [0, \infty)$. For convenience, we consider a rescaled version of $T_{n,\beta}$,

$$\tilde{T}_{n,\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & & \\ \tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & \mathcal{N}(0,1) & \tilde{\chi}_{(n-2)\beta} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \tilde{\chi}_{\beta} & \mathcal{N}(0,1) \end{pmatrix}.$$

For the global behavior, note that the empirical distribution of $\tilde{T}_{n,\beta}$ converges weakly to $\bar{\mu}_\alpha$, almost surely. Note also that, under this scaling, the case $\alpha = 0$ is treated similarly in which the limiting measure is nothing but the standard Gaussian distribution $\mathcal{N}(0,1)$.

Theorem 2 (Local law/bulk statistics)**.** *For fixed $E \in \mathbb{R}$, as $n \to \infty$ with $n\beta \to 2\alpha \in [0, \infty)$, the point process*

$$\xi_{n,\beta} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{n(\lambda_j - E)}$$

converges weakly to a homogeneous Poisson point process with intensity $\bar{\mu}_\alpha(E)$. Here $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ are the eigenvalues of $\tilde{T}_{n,\beta}$.

By analyzing the joint density, it was shown in [1] that the bulk statistics $\xi_{n,\beta}$ converges weakly to a homogeneous Poisson point process with intensity θ_E, where

$$\theta_E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{E^2}{2} + 2\alpha \int \log |E - y| \bar{\mu}_\alpha(dy) \right).$$

We introduce another approach to derive the Poisson statistics via the tridiagonal random matrix models. In the regime where $n\beta \to 2\alpha$, the diagonal of $T_{n,\beta}$ is an i.i.d. (independent identically distributed) sequence while the sub-diagonal is uniformly "bounded". This observation suggests us to use a well-known method of Minami [3]. For this purpose, we need (i) Wegner's bound, (ii) Minami's bound, (iii) exponential decay of Green's functions and (iv) local law. Here the local law (iv) requires that $\mathbb{E}[\xi_{n,\beta}(I)] = \mathbb{E}[\#\{\lambda_j \in E + n^{-1}I\}] \to \bar{\mu}_\alpha(E)|I|$, for any bounded interval I. A non-trivial identity $\theta_E = \bar{\mu}_\alpha(E)$ is then derived by this approach.

In the model considered in [3], the exponential decay of Green's functions (iii) and the local law (iv) are consequence of stationary invariant property. However, it is not the case for the matrix $\tilde{T}_{n,\beta}$. To show these two properties are the main issue of this approach. Detailed proofs can be found in the preprint [4].

References

[1] Benaych-Georges, F., Péché, S.: Poisson statistics for matrix ensembles at large temperature. J. Stat. Phys. **161**(3), 633–656 (2015)

[2] Dumitriu, I., Edelman, A.: Matrix models for beta ensembles. J. Math. Phys. **43**(11), 5830–5847 (2002)

[3] Minami, N.: Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model. Comm. Math. Phys. **177**(3), 709–725 (1996)

[4] Nakano, F., Trinh, K.D.: Gaussian beta ensembles at high temperature: eigenvalue fluctuations and bulk statistics. arXiv:1611.09476

[5] Trinh, K.D.: Global spectrum fluctuations for gaussian beta ensembles: A martingale approach. Journal of Theoretical Probability (2017). DOI 10.1007/s10959-017-0794-9