Asymptotic behavior of lifetime sums of random simplicial complex processes

金澤 秀 *
(日野正訓氏 (京都大学) との共同研究)

1 序

$K_n = V_n \sqcup E_n$ を頂点数 n の完全グラフとする．ここで, V_n と E_n はそれぞれ頂点集合と辺集合である．各辺 $e \in E_n$ が独立に確率 p $(0 \le p \le 1)$ で含まれる K_n のランダム部分グラフを Erdős–Rényi グラフという．後に, p を区間 $[0,1]$ 上で動かして Erdős–Rényi グラフの族を考察するため, 次のような構成を行う．K_n の各辺 $e \in E_n$ に対して, 区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数 u_e を独立にのせ, p $(0 \le p \le 1)$ に対して, K_n のランダム部分グラフ $K_n(p)$ を

$$K_n(p) := V_n \sqcup \{e \in E_n \mid u_e \le p\}$$

で定義する．これにより得られる Erdős–Rényi グラフの増大族 $\mathcal{K}_n := \{K_n(t)\}_{0 \le t \le 1}$ は, V_n 上の Erdős–Rényi グラフ過程と呼ばれ, 重み付き完全グラフ $(K_n, \{u_e\}_{e \in E_n})$ における全域木の重みの最小値を調べた Frieze の定理 [3] において重要な役割を果たす．

本稿では, ランダムグラフ過程の高次元版であるランダム複体過程について論じ, Frieze の定理の高次元への一般化とみなせる結果を紹介する．特に, 平岡–白井 [4] により提起されたいくつかの問題に対する解を与える (定理 3.2, 定理 3.1)．議論の主要部の一つは, コホモロジー消滅定理 [1] を Betti 数の定量評価という定式化に基づいて一般化することである．本講演は, 日野正訓氏 (京都大学) との共同研究に基づく．

2 ランダム複体過程

ランダム単体複体はランダムグラフの自然な高次元化として近年盛んに研究されている．典型的なランダム単体複体として Linial–Meshulam 複体とランダムクリーク複体を紹介する．$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．任意の $0 \le k \le n$ に対して, $[n]$ の k 点集合の全体を $\binom{[n]}{k}$ と表記する．$d \ge 1$ として, 各 $\sigma \in \binom{[n]}{d+1}$ に対して, 区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数 u_σ を独立にのせる．d-Linial–Meshulam 複体過程 $\mathcal{K}_n^{(d)} := \{K_n^{(d)}(t)\}_{0 \le t \le 1}$ は,

$$K_n^{(d)}(t) := \bigsqcup_{k=1}^{d} \binom{[n]}{k} \sqcup \left\{ \sigma \in \binom{[n]}{d+1} \;\middle|\; u_\sigma \le t \right\} \quad (0 \le t \le 1)$$

で定義される．また一般に, 与えられたグラフ $G = V \sqcup E$ に対して, G をクリーク化した単体複体 $\mathrm{Cl}(G)$ とは, 1 次元スケルトンが G と一致するような単体複体の中で包含関係に関して最大なものをいう．ランダムクリーク複体過程 $\mathcal{C}_n := \{C_n(t)\}_{0 \le t \le 1}$ は, $C_n(t) = \mathrm{Cl}(K_n(t))$ で定義される．

*東北大学大学院理学研究科 E-mail: kanazawa.shu.p5@dc.tohoku.ac.jp

平岡–白井 [4] は, パーシステントホモロジーの枠組みで, Frieze の定理の高次元への類似を研究した．パーシステントホモロジーは, フィルトレーションと呼ばれる単体複体の増大族に対して, その位相的な特徴がどのように変化するかを記述することができる [2, 5]. 特に, フィルトレーションにおいてそれぞれの次元の "穴" (間隙, 輪, 空洞など) の発生時刻と消滅時刻という量が定まる．そして, フィルトレーションにおける k 次元の "穴" に対して, k-次生存時間は発生時刻と消滅時刻の差により定義される．論文 [4] では, フィルトレーション $\mathbb{X} = \{X(t)\}_{0\le t\le 1}$ における k-次生存時間の総和 $L_k(\mathbb{X})$ が次のような積分表示をもつことが示された:

$$L_k(\mathbb{X}) = \int_0^1 \beta_k(X(t))\,dt.$$

ここで, $\beta_k(X(t))$ は $X(t)$ の k-次 (簡約)Betti 数を表す．Frieze の定理は, Erdős–Rényi グラフ過程 $\mathcal{K}_n$ の 0-次生存時間和 $L_0(\mathcal{K}_n)$ の頂点数 n に対する漸近挙動に関する結果とみなせるため, d-Linial–Meshulam 複体過程 $\mathcal{K}_n^{(d)}$ とランダムクリーク複体過程 $\mathcal{C}_n$ の高次の生存時間和の頂点数 n に対する漸近挙動を調べることは自然な問題である．

3 主結果

定理 3.1. $k \ge 0$ とする．このとき, ある正定数 c と C が存在して, 十分大きな n に対して,

$$c\,n^{k/2+1-1/(k+1)} \le \mathbb{E}[L_k(\mathcal{C}_n)] \le C\,n^{k/2+1-1/(k+1)}.$$

定理 3.2. $d \ge 1$ とする．このとき, ある正定数 I_{d-1} が存在して, 任意の $r \in [1,\infty)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{L_{d-1}(\mathcal{K}_n^{(d)})}{n^{d-1}} - I_{d-1}\right|^r\right] = 0. \tag{3.1}$$

定理 3.1 は, 論文 [4] で得られていた次の評価の上からのオーダー評価を改良したものである:

$$c\,n^{k/2+1-1/(k+1)} \le \mathbb{E}[L_k(\mathcal{C}_n)] \le \begin{cases} C\,n^k \log n & (k = 0, 1), \\ C\,n^k & (k \ge 2). \end{cases}$$

また, 論文 [4] では $\mathbb{E}\left[L_{d-1}(\mathcal{K}_n^{(d)})\right]/n^{d-1}$ の上極限と下極限が区間 $(0,\infty)$ にあることが示されていたが, 極限値の存在に関しては形式的な議論より予想されていたのみであった．式 (3.1) から, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[L_{d-1}(\mathcal{K}_n^{(d)})\right]/n^{d-1} = I_{d-1}$ が従う．I_{d-1} は具体的な積分表示を持つ数である．

参考文献

[1] W. Ballmann and J. Świątkowski, On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 615–645.

[2] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian, Topological persistence and simplification, Discrete Comput. Geom. **28** (2002), 511–533.

[3] A. M. Frieze, On the value of a random minimum spanning tree problem, Discrete Applied Math. **10** (1985), 47–56.

[4] Y. Hiraoka and T. Shirai, Minimum spanning acycle and lifetime of persistent homology in the Linial–Mehsulam process, Random Structures & Algorithms **51** (2017), 183–371.

[5] A. Zomorodian and G. Carlsson, Computing persistent homology, Discrete Comput. Geom. **33** (2005), 249–274.

Jump processes on the boundaries of random trees

得重雄毅

2017 年 11 月 20 日

無限ツリー T とその上の遷移的な RW$\{Z_n\}_{n\geq 0}$ を考える. T 上の遷移的な RW は最終的に T のマルティン境界 M に到達する. 木上氏による先行研究において、ある仮定の下でこの T 上の RW から M 上の飛躍型マルコフ過程が構成できることが示され、また調和測度の volume doubling property という仮定の下で対応する熱核評価などの結果が得られている. 本講演では T として、優臨界ゴルトン-ワトソンツリーを取り、またその上の RW として λ-*biased RW* と呼ばれるものを考えた時に対応する確率過程または熱核に対してどの様な結果が得られるかについて説明する.

証明において、Lyons-Pemantle-Peres らによる、ツリーのなす空間の力学系に対するエルゴード理論 [3, 4] や、最近プレプリントとして発表された S.Lin によるこの力学系の不変分布に関する具体的表示式 [2] が重要な評価を与えるため、それらについても説明する.

参考文献

[1] Kigami, J.: *Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees*, Adv. in Math. 225, (2010), 2674-2730.

[2] Lin, S.: *Harmonic measure for biased random walk in a supercritical Galton-Watson tree*, Arxiv:1707.01811.

[3] Lyons, R., Pemantle, R., Peres, Y.: *Ergodic theory on Galton-Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure*, Ergodic Theory Dynamical Systems, 15, (1995), 593-619.

[4] Lyons, R. Pemantle, R., Peres, Y.: *Biased random walks on Galton-Watson trees*, Probab. Theory Relat. Fields, 106, (1996), 249-264.

Regularity estimates for anisotropic nonlocal operators

by Jamil Chaker (Bielefeld University)

(Joint work with Moritz Kassmann)

In this talk we study weak solutions to nonlocal equations driven by integro-differential operators of the form

$$\mathcal{L}u(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(x)} (u(y) - u(x)) \, \mu(x, \mathrm{d}y),$$

where $(\mu(x, \cdot))_{x \in \mathbb{R}^d}$ is a symmetric family of measures. Given $\mu(x, \mathrm{d}y)$ and $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ we define the corresponding bilinear forms

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \, \mu(x, \mathrm{d}y) \, \mathrm{d}x.$$

For given $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in (0, 2)$ consider the family of measures $(\mu_{\text{axes}}(x, \mathrm{d}y))_{x \in \mathbb{R}^d}$ defined as follows

$$\mu_{\text{axes}}(x, \mathrm{d}y) = \sum_{k=1}^{d} \left(\alpha_k (2 - \alpha_k) |x_k - y_k|^{-1-\alpha_k} \, \mathrm{d}y_k \prod_{i \neq k} \delta_{\{x_i\}}(\mathrm{d}y_i) \right), \; x \in \mathbb{R}^d$$

and the metric on $\mathbb{R}^d$

$$d(x, y) := \sup_{k \in \{1, \ldots, d\}} \left\{ |x_k - y_k|^{\alpha_k / \alpha_{\max}} \mathbb{1}_{\{|x_k - y_k| \leq 1\}}(x, y) + \mathbb{1}_{\{|x_k - y_k| > 1\}}(x, y) \right\},$$

where $\alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$. We denote balls in the metric d with radius $r > 0$ and center $x \in \mathbb{R}^d$ by $M_r(x)$. The family $\mu_{\text{axes}}(x, \cdot)$ plays the role of the reference family for $\mu(x, \cdot)$ in the sense that we assume the corresponding energy forms to be locally comparable.

The aim of this talk is to study weak solutions to

$$\mathcal{L}u = f \qquad \text{in } M_r(x) \tag{1}$$

for sufficiently smooth f. Under suitable assumptions on the family $\mu(x, \cdot)$ we prove an a priori Hölder estimate for weak solutions to $\mathcal{L}u = 0$ with the help of a weak Harnack inequality. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be open. To put the problem into a functional analytic framework, we define appropriate function spaces. Weak solutions are defined with the help of symmetric nonlocal bilinear forms. The space of test functions consists of all functions $u \in L^2(\Omega)$ with $u \equiv 0$ on Ω^c and

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (u(y) - u(x))^2 \, \mu(x, \mathrm{d}y) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

This space is denoted by $H^{\mu}_{\Omega}(\mathbb{R}^d)$. Solutions are defined on the space $V^{\mu}(\Omega|\mathbb{R}^d)$, which consist of all functions $u \in L^2(\Omega)$ with

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))^2\,\mu(x,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

To obtain the weak Harnack inequality, we have to derive some functional inequalities for our bilinear forms such as a localized Sobolev-type inequality and a Poincaré inequality for functions from the space of solutions.

We obtain two main results. The first is a weak Harnack inequality for weak supersolutions to (1).

Theorem 1. *Let $f \in L^q(M_1(0))$ for some $q > \max\{2, (\alpha_1)^{-1} + \cdots + (\alpha_d)^{-1}\}$. Let $u \in V^{\mu}(M_1(0)\big|\mathbb{R}^d)$, $u \geq 0$ in $M_1(0)$ satisfy*

$$\mathcal{E}(u,\phi) \geq (f,\phi) \quad \text{for every non-negative } \phi \in H^{\mu}_{M_1(0)}(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

Then there exists $p_0 \in (0,1)$, $c_1 > 0$, independent of u, such that

$$\inf_{M_{\frac{1}{4}}(0)} u \geq c_1\Big(\fint_{M_{\frac{1}{2}}(0)} u(x)^{p_0}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p_0} - \sup_{x\in M_{\frac{15}{16}}(0)} 2\int_{\mathbb{R}^d\setminus M_1(0)} u^-(z)\mu(x,\mathrm{d}z) - \|f\|_{L^q(M_{\frac{15}{16}}(0))}.$$

The a priori Hölder estimate for weak solutions follows from the weak Harnack inequality and a decay of oscillation for weak solutions. Using these two estimates we deduce an Hölder estimate for weak solutions, which is the second main result of this talk.

Theorem 2. *Assume $u \in V^{\mu}(M_1\big|\mathbb{R}^d)$ satisfies*

$$\mathcal{E}(u,\phi) = 0 \quad \text{for every non-negative } \phi \in H^{\mu}_{M_1}(\mathbb{R}^d).$$

Then there are $c_1 \geq 1$ and $\delta \in (0,1)$, independent of u, such that the following Hölder estimate holds for almost every $x, y \in M_{\frac{1}{2}}$

$$|u(x)-u(y)| \leq c_1\|u\|_{\infty}|x-y|^{\delta}. \tag{3}$$

相互作用粒子系に対する勾配条件とグリーン久保公式

MAKIKO SASADA

In the diffusive hydrodynamic limit for a symmetric interacting particle system (such as the exclusion process, the zero range process, the stochastic Ginzburg-Landau model, the energy exchange model), a possibly non-linear diffusion equation is derived as the hydrodynamic equation. The bulk diffusion coefficient of the limiting equation is given by Green-Kubo formula and it can be characterized by a variational formula. In the case the system satisfies the gradient condition, the variational problem is explicitly solved and the diffusion coefficient is given from the Green-Kubo formula through a static average only. In other words, the contribution of the dynamical part of Green-Kubo formula is 0. In this talk, we consider the converse, namely if the contribution of the dynamical part of Green-Kubo formula is 0, does it imply the system satisfies the gradient condition or not. We show that if the equilibrium measure μ is product and L^2 space of its single site marginal is separable, then the converse also holds.

As an application of the result, we consider a class of stochastic models for energy transport studied by Gaspard and Gilbert in [1, 2], where the exact problem is discussed for this specific model.

References

[1] P. Gaspard and T. Gilbert, *On the derivation of Fourier's law in stochastic energy exchange systems*, J. Stat. Mech.: Theory and Experiment, (2008), p11021.

[2] P. Gaspard and T. Gilbert, *Heat transport in stochastic energy exchange models of locally confined hard spheres*, J. Stat. Mech.: Theory and Experiment, (2009), p08020.

Makiko Sasada, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan

E-mail address: sasada@ms.u-tokyo.ac.jp

拡散過程の古典力学モデル
—低エネルギー軽粒子が存在する場合について

梁　松　（筑波大学）

拡散過程のノンランダムな古典力学系による導出という問題を考える。具体的には、$\mathbf{R}^d (d \geq 2)$ において、理想気体と呼ばれる無数の軽粒子を含む環境に置かれた 1 つの重粒子が、軽粒子達と古典力学系に従って相互作用しながら動くというモデルを考える。また、粒子間相互作用はあるコンパクト台を持つポテンシャル関数 U によって与えられるとし、系のハミルトンは $\frac{1}{2}|V|^2 + \sum_{(x,v)} \frac{m}{2}|v|^2 + \sum_{(x,v)} U(X-x)$ で与えられるとする。但し、(X, V) は重粒子の状態 (位置と速度) を表し、m は軽粒子達の質量であり、(x, v) は各軽粒子の状態を表す。

即ち、系のランダム性は環境軽粒子の初期条件のみに存在し、環境の初期条件 $\widetilde{\omega} \in Conf(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ さえ与えられれば、系全体は次の常微分方程式に従う。

$$
\begin{cases}
\quad \dfrac{d}{dt} X^{(m)}(t, \widetilde{\omega}) = V^{(m)}(t, \widetilde{\omega}), \\
\dfrac{d}{dt} V^{(m)}(t, \widetilde{\omega}) = -\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \nabla U(X^{(m)}(t, \widetilde{\omega}) - x^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega})) \mu_{\widetilde{\omega}}(dx, dv), \\
(X^{(m)}(0, \widetilde{\omega}), V^{(m)}(0, \widetilde{\omega})) = (X_0, V_0), \\
\\
\quad \dfrac{d}{dt} x^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}) = v^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}), \\
m \dfrac{d}{dt} v^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}) = -\nabla U(x^{(m)}(t, x, v, \widetilde{\omega}) - X^{(m)}(t, \widetilde{\omega})), \\
(x^{(m)}(0, x, v, \widetilde{\omega}), v^{(m)}(0, x, v, \widetilde{\omega})) = (x, v), \qquad (x, v) \in \widetilde{\omega}.
\end{cases}
$$

ただし、$\mu_{\widetilde{\omega}}(\ \cdot\ )$ は計数測度を表す。また、$\widetilde{\omega}$ の分布は

$$
\widetilde{\lambda_m}(dx, dv) = m^{\frac{d-1}{2}} \rho\Big(\frac{m}{2}|v|^2, x - X_0\Big) dx dv
$$

を intensity として持つ Poisson point process $\widetilde{P_m}$ であるとする。ここで、$\rho(u, z) : [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ は z についてコンパクト台を持つ偶関数で、$u \to \infty$ で z について一様的に十分速く 0 に収束し、次の条件を満たす可測関数である。

A1. 定数 $\overline{v} > 0$ が存在し、任意の $u < \frac{1}{2}\overline{v}^2$ と $z \in \mathbf{R}^d$ において $\rho(u, z) = 0$ である。

即ち、すべての軽粒子の初期運動エネルギーは $\frac{1}{2}\overline{v}^2$ 以上であると仮定する。

これらの設定の下で、重粒子の動きを表す確率過程 $\{(X^{(m)}(t), V^{(m)}(t)); t \geq 0\}$ の $\widetilde{P_m}$ の下での分布は $m \to 0$ の時、ある拡散過程に収束することを証明したい。但し、$C([0, \infty); \mathbf{R}^{2d})$ 上の距離は

$$
dist(w_1, w_2) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Big(1 \wedge \max_{t \in [0,k]} |w_1(t) - w_2(t)|\Big), \qquad w_1, w_2 \in \mathbf{R}^{2d}
$$

である。

[1] は $\overline{v} \geq C_0 := \sqrt{2R_U\|\nabla U\|_\infty}$ （ただし、R_U は U の台の半径である)、即ち、すべての軽粒子の初期速度が $C_0 m^{-\frac{1}{2}}$ 以上であるという仮定の下で、同じ問題を考えた。特に、この仮定の下では、粒子間相互作用は軽粒子を止めるのに十分でなく、すべての軽粒子は重粒子との相互作用有効領域を一定の速度を維持したまま通過できる、即ち、各軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間は $m^{\frac{1}{2}}$ のオーダーで有界である。従って、軽粒子の動きを考えるとき、重粒子は凍結されているとして近似できる。これが [1] の主なアイデアであった。

しかし、もっと現実的なモデルには、$\frac{1}{2}C_0^2$ 以下の初期運動エネルギーを持つ軽粒子も存在する。この時、（もっと簡単なモデルである）凍結近似ですら、有効相互作用領域における滞在時間は有界ではない。例えば、軽粒子が（固定されている）重粒子に向かって真っすぐに向かい、初期エネルギーがちょうどポテンシャル関数の最大値と等しいとき、軽粒子はポテンシャル関数の最大値を与える点に着いたらそこで止まるので、滞在時間は無限大になる。

今回、上述のような、低エネルギーを持つ軽粒子も存在する、即ち、相互作用時間が有界でないモデルを考える。その代わりに、ポテンシャル関数は球対称で、斥力を与えるとする。即ち、次を仮定する：

U1. $U \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$。また、定数 $R_U > 0$ と滑らかな関数 $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在し、$U(x) = h(|x|), \forall x \in \mathbf{R}^d$;$U(x) = 0$ if $|x| \geq R_U$、かつ $h'(a) < 0, \forall a \in (0, R_U)$ とする。さらに、$h''(0) < 0$ とする。

THEOREM 1 以上の条件を仮定する。また、$d > 2(1 + \|h''\|_\infty)(-h''(0))^{-1/2} + 1$ とする。このとき、$\{(X^{(m)}(t), V^{(m)}(t)); t \geq 0\}$ の $\widetilde{P_m}$ の下での分布は $m \to 0$ のとき、生成作用素

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} a_{kl}\frac{\partial^2}{\partial V_k \partial V_l} + \sum_{k,l=1}^{d} b_{kl}V_l\frac{\partial}{\partial V_k} + \sum_{k=1}^{d} V_k\frac{\partial}{\partial X_k}$$

をもつ拡散過程に弱収束する。

係数 a と b はそれぞれ凍結近似の 0-次及び 1-次の誤差項に対応している。極限過程の具体的な定義及び証明のアイデアは講演中に説明する。

References

[1] S. Kusuoka and S. Liang, *A classical mechanical model of Brownian motion with plural particles,* Rev. Math. Phys. 22, no. 7, 733–838 (2010)

[2] S. Liang, *A mechanical model of Brownian motion for one heavy particle including slow light particles,* Submitted for publication

On properties of optimal paths in First Passage Percolation

中島秀太[*]　京都大学 数理解析研究所　博士後期課程 2 年

キーワード：First Passage Percolation, optimization problem, random environment

概要

伝染病は、病原体がその宿主から他の個体へと移り、連鎖的に感染者数が拡大する伝染性の病気である。それらを数理モデルに置き換える際、例えば接触感染を考えたとしても、接触した時必ず感染するとは限らず、さらに「接触」という個体それぞれの行動に依存する極めて複雑なものを正確に記述することは至難の業である。そのような状況の中でひとつの実現の方法は適当なランダム環境を与え、伝染速度をランダム環境に依存する形で割り当てるというものである。First Passage Percolation はそのような実現の一つであり、動的な伝染モデルとして 1965 年に Hammersley と Welsh により導入された。以下で具体的な定義を述べる。

モデルの定義

隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す。各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には、その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする。また、$\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する。さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を

$$T(x,y) := \inf\{t(\pi) :\ \pi \text{は } x \text{ から } y \text{ への路}\}.$$

で定義し、最小移動時間を与える路を optimal path と呼ぶことにする。x から y への optimal path 全体の集合を $\mathbb{O}(x,y)$ と置くことにする。

病原体が辺 e の移動にかかる時間を τ_e と考えると、$T(0,x)$ は原点で病原体が発生してから x が感染するまでにかかる時間となる。

講演内容

本講演では optimal path の最近得られたいくつかの性質について述べる。次を満たす時、τ の分布が適切であると言う:

$$\mathbb{P}(\tau_e = \underline{\tau}) < \begin{cases} p_c(d) & \text{if } \underline{\tau} = 0 \\ \vec{p}_c(d) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

[*] njima@kurims.kyoto-u.ac.jp

ここで $\underline{\tau}$ は τ_e の分布の support の下限、$p_c(d), \vec{p}_c(d)$ はそれぞれ d 次元 percolation モデル、d 次元 oriented percolation モデルの臨界確率である。

一つ目の結果は分布が atom を持つ時の optimal path の数を評価した。

Theorem 1. τ_e の分布が適切で *atom* を持ち *(i.e.,* $\exists a \in \mathbb{R}$ *such that* $\mathbb{P}(\tau_e = a) > 0$ *)*、$\mathbb{E}\tau_e^2 > \infty$ である時、次が確率 1 で成り立つ*:*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sharp\mathbb{O}(0, n\mathbf{e}_1) \le \limsup_{n} \frac{1}{n} \log \sharp\mathbb{O}(0, n\mathbf{e}_1) < \infty.$$

上の定理から、分布が atom を持つ時、複数の optimal path がどのように分布しているかという問題が考えられる。その問題に対して次のような結果が得られた。

Theorem 2. τ_e の分布が適切かつ $\mathbb{E}\tau_e^2 > \infty$ である時、ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、

$$c_1 n \le \mathbb{E}\left[\sharp \bigcap_{\Gamma\in\mathbb{O}(0,n\mathbf{e}_1)} \Gamma\right] \le \mathbb{E}\left[\sharp \bigcup_{\Gamma\in\mathbb{O}(0,n\mathbf{e}_1)} \Gamma\right] \le c_2 n,$$

ここで路を辺の集合としてみて共通部分、和集合をとっている。

本講演では First Passage Percolation の研究の背景や動機を説明するとともに、証明で使うアイデアについても議論する予定である。

参考文献

[1] A. Auffinger, J. Hanson, and M. Damron. 50 years of first passage percolation, 2015. ArXiv e-print 1511.03262.

[2] Shuta Nakajima Properties of optimal paths in first passage percolation, 2017. ArXiv e-print 1709.03647.

パーコレーションと Cheeger定数

山本　航平　(東北大学)*

1. パーコレーション

パーコレーションは1957年に Broadbent と Hammersley により提唱された確率論の一種である. 無向グラフ $G = (V, E)$ を連結, 局所有限 (locally finite), 頂点推移という条件を満たすものとする. パラメータ $p \in [0, 1]$ を固定し各辺 $e \in E$ がそれぞれ独立に確率 p で open となる現象を考える. このとき $(V, \{\text{open edge}\})$ で構成されるランダムグラフを得る. 詳しくは $\Omega = \{\{\omega(e)\}_{e\in E} | \omega(e) \in \{0, 1\}\}$ 上の確率測度として $\mathbb{P}_p = \prod_{e\in E} \mu_e$ が構成される. ここで μ_e は辺 e 上のパラメータ p に関するベルヌーイ測度であり, $\mu_e(\omega(e) = 1) = p, \mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p$ を満たす. グラフ G を無限グラフとして $\omega \in \Omega$ に対して $N = N(\omega)$ をグラフ $(V, \{\text{open edge}\})$ 上の無限な連結成分の個数とする. 頂点推移という条件から各 p に対してある $k \in \{0, 1, \infty\}$ が存在して $\mathbb{P}_p(N = k) = 1 \quad a.s.$ が成り立つ [6]. この k に関してある種の臨界現象が成り立つことが知られている. つまり各 G に対してある $p_c = p_c(G)$ が存在して $p > p_c$ ならば $\mathbb{P}_p(N \geq 1) = 1 \quad a.s.$, $p < p_c$ ならば $\mathbb{P}_p(N = 0) = 1 \quad a.s.$ が成り立つ. 同様にある $p_u = p_u(G)$ が存在して $p > p_u$ ならば $\mathbb{P}_p(N = 1) = 1 \quad a.s.$, $p_c < p < p_u$ ならば $\mathbb{P}_p(N = \infty) = 1 \quad a.s.$ が成り立つ. それぞれ critical probability, uniquness threshold と呼ぶ. パーコレションの主な研究として与えられたグラフに対して p_c, p_u を求めることが挙げられる. 加えて一般に $N = \infty$ となる区間が存在するとは限らない. つまりグラフによって $p_c = p_u$ が成り立つものが存在する.

2. Cheeger 定数

頂点の部分集合 $S \subset V$ に対して境界 ∂S を定める. ある $y \in S$, $x \in S^C$ そして x, y を端点に持つ辺が存在するとき $x \in \partial S$ と定義する. これをもって $h(G) = \inf_{S\subset V} |\partial S|/|S|$ を Cheeger 定数として定める. Cheeger 定数と p_c と p_u のギャップの関係について次のことが知られている. $h(G) = 0$ ならば $p_c = p_u$ が成り立つ [3]. この逆が成立するか否かが未解決問題として残されている. $h(G) > 0$ を満たすグラフの多くが $p_c < p_u$ が成り立つか否かが示されていない. 重要な例の1つとして regular tree と $\mathbb{Z}$ の Cartesian 積グラフが挙げられる. 2つのグラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ に対して Cartesian 積グラフ $G_1 \Box G_2$ を次で定める.

$$
\begin{aligned}
V(G_1 \Box G_2) &= V_1 \times V_2. \\
E(G_1 \Box G_2) &= \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} | x_1 = x_2, \{y_1, y_2\} \in E_2\} \\
&\quad \cup \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} | y_1 = y_2, \{x_1, x_2\} \in E_1\}.
\end{aligned}
$$

このとき $d \geq 3$ に対して $h(T_d \Box \mathbb{Z}) > 0$ を満たす. 先行結果として $d \geq 5$ に対しては $p_c < p_u$ が成り立つことが知られている [7]. 特に無限グラフどうしの Cartesian 積グラ

2010 Mathematics Subject Classification: 60K35, 60J80, 82B43
キーワード：percolation, branching processes
* 〒980-8578　仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号　東北大学 大学院理学研究科
e-mail: kohei.yamamoto.t1@dc.tohoku.ac.jp

フの性質から $p_u < 1$ が成り立つ [5] つまり $N = 0, \infty, 1$ になる3つの区間が存在する例となっている.

3. 主結果

グラフ $T_d \square \mathbb{Z}$ の critical probability については $\mathbb{Z}^2$ 上の percolation を利用することで評価をした. 事象 A_n をグラフ $\mathbb{Z}^2$ 上の原点と頂点 $(n, 0)$ が同じ連結成分に含まれるものと定める. このときある関数 $\alpha(p)$ が存在して $\alpha(p) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(A_n)^{1/n}$ を満たす [4]. この $\alpha(p)$ は区間 $[0, 1/2]$ に制限すると狭義単調増加で連続な関数である. よって自然に逆関数を定めることができ, これを用いて $T_d \square \mathbb{Z}$ の critical probability を表すことができる.

主定理 3.1 自然数 $d \geq 2$ に対して次の等式が成り立つ.

$$p_c(T_d \square \mathbb{Z}) \leq \alpha^{-1}(p_c(T_d)).$$

特に $p_c(T_d) = 1/(d-1)$ は既知であることから $\alpha(p)$ を解析することで p_c の上界を求めることができる. 関数 $\alpha(p)$ は $p \leq 1/3$ の範囲で $\alpha(p) > p/(1-p)$ を満たすことを示すことで次の結果を得た.

主定理 3.2 自然数 $d \geq 2$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$p_c(T_d \square \mathbb{Z}) \quad \leq \frac{1}{d}.$$

また $p_c(T_d \square \mathbb{Z})$ の上界を改良したことで次の系を得た.

系 3.3 自然数 $d \geq 4$, グラフ $T_d \square \mathbb{Z}$ に対して $p_c < p_u$ が成り立つ.

参考文献

[1] Aizenman, M., Kesten, H. and Newman, C. M.(1987) *Uniquness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation.* Comm. Math. Phys. 111, no.4, 505-531.

[2] Broadbent, S. R. and Hammersley, J. M.(1957) *Percolation processes I. Crystals and mazes.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 53, 629—641.

[3] Gandolfi, A., Keane, M. S. and Newman, C. M. (1992) *Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses.* Probab. Theory Related Fields 92 (1992), no. 4, 511—527.

[4] Grimmett, Geoffrey.(1999) *Percolation. second edition.* Springer-Verlag, Berlin.

[5] Hggstrm, Olle., Peres, Yuval. and Schonmann, Roberto H. (1999) *Percolation on transitive graphs as a coalescent process: relentless merging followed by simultaneous uniqueness.* Perplexing problems in probability, 69—90, Progr. Probab., 44

[6] Newman, C. M. and Schulman, L. S.(1981) *Number and density of percolating clusters.* J. Phys. A 14, no.7, 1735-1743.

[7] Lyons, Russell and Peres, Yuval(2016) *Probability on trees and networks.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 42.

カントール拡散過程の安定性問題とその応用

土屋 貴裕

Abstract

本講演では 一次元のドリフトなしで non-Lipschitz 拡散係数をもつ確率微分方程式の解の安定性とその応用について述べる．ソース論文は https://arxiv.org/abs/1604.06839 (SPA in Press).

拡散係数が non-Lipschitz であると解の概念自体を整理して考える必要がある．なぜなら Engelbert-Schmidt の弱解の存在と一意性定理，山田渡辺の道ごとの解の一意性などあるように退化の度合いは解の性質を決める上で重要な鍵となっているからである．ここでは単調増大で原点出発する係数について道ごとの一意性が成立する必要十分条件をひとつ導き出しておく．これによって強解における安定性問題を考えことができる．

その上で non-Lipschitz 拡散係数を一様ノルムで近づけた時の安定性を上から評価で特徴づける．この結果は (1/2)-Holder 連続な係数に対する Euler-丸山近似で指摘されているように収束が比較的に遅いこと整合的である．この収束が最適か議論するため，今回は異なるアプローチをとる．すなわち，そのまま近似するのではなく，もとの拡散係数に手を加えた上での収束の安定性の結果を示す．より正確には下から ϵ だけ持ち上げた拡散係数を考える．するとこの係数は 一般化された Nakao-Le Gall 条件を満たし，なおかつ収束は係数に ϵ^{-3} がかかるが多項式のオーダーで，しかもそのオーダーは ϵ に依存しないことが示せる．

具体的な例として λ-Cantor 関数を考える．これは中央部分を $\lambda \in (0,1)$ だけ取り除いて逐次的に構成できる Cantor 集合に対する関数で H_λ-Holder 連続な関数になる，$\mathrm{H}_\lambda \in (0,1)$．それを拡散係数にもつ確率微分方程式を考えることで解の安定性問題が考えられる．先の必要十分条件の命題を踏まえつつ，上記の二通りのアプローチの仕方で上からの評価がだいぶ様相が異なることを示す．

最後に偏微分方程式における一般的な仮定を満たさないが弱解を持つ Fokker-Planck 等式への応用について述べる．さらに最近の Malliavin 解析の結果を援用して滑らかな基本解の存在と一意性を導き出せることを紹介する．

E-mail address: suci@probab.com

会津大学コンピュータ理工学部

本発表は橋本大哉氏 (名古屋医療センター) との共同研究である．

Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations

Tomonori Nakatsu (Shibaura Institute of Technology)*

1 Introduction

This talk is based on [4].

In this talk, we shall deal with the following one-dimensional stochastic differential equation (SDE),

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{1}$$

where $b, \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are measurable functions and $\{W_t, t \in [0, \infty)\}$ denotes a one-dimensional standard Brownian motion defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. We will consider discrete time maximum and continuous time maximum which are defined by $M_T^n := \max\{X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}\}$ and $M_T := \max_{0 \le t \le T} X_t$, respectively, where the time interval $[0, T]$ and the time partition $\Delta_n : 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, $n \ge 2$ are fixed. We use the notations $p_{M_T^n}, p_{M_T}$ and p_{X_T} to denote the density functions of M_T^n, M_T and X_T, respectively.

The first goal of the talk is to show lower and upper bounds of $p_{M_T^n}$. Due to the structure of the upper bound obtained here, it is not immediately apparent whether we can show the pointwise convergence of $p_{M_T^n}(x)$ as $n \to \infty$ for a fixed x. As the second goal, we will show the pointwise convergence of $p_{M_T^n}(x)$ to $p_{M_T}(x)$ as $n \to \infty$ for a fixed x by means of an integration by parts formula. Finally, we will prove the positivity of p_{M_T} and a relationship between p_{M_T} and p_{X_T}.

2 Main results

Assumption (A)

We assume the following.

(A1) For $t \in [0, \infty)$, $b(t, \cdot), \sigma(t, \cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ uniformly with respect to $t \in [0, \infty)$.

(A2) There exists $c > 0$ such that $|\sigma(t, x)| \ge c$ for all $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Theorem 1. *Assume (A). Then, the probability density function of M_T^n, $p_{M_T^n}$ satisfies*

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_1^n m_2^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{k=1}^n \frac{\pi^{\frac{n-k}{2}}}{2^{\frac{2n-k-1}{2}}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \varphi(D_i(x)) \right) \frac{1}{\sqrt{t_k}} e^{-m_2 \frac{(x-x_0)^2}{t_k}} &\le p_{M_T^n}(x) \\ &\le \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{M_1^n M_2^{\frac{n-1}{2}}} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{t_k}} e^{-M_2 \frac{(x-x_0)^2}{t_k}} + \frac{1}{\sqrt{t_n}} e^{-M_2 \frac{(x-x_0)^2}{t_n}} \right],\end{aligned}$$

for any $x \in \mathbb{R}$, where

$$D_i(x) := \sqrt{\frac{2m_2(t_{i+1} - t_i)}{t_i t_{i+1}}}(x - x_0), i = 1, \cdots, k-1$$

and $\varphi(x) := \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, and $m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$ do not depend on $x, y \in \mathbb{R}$ and $s, t \in [0, T]$

*This research was supported by JSPS KAKENHI(17K14209)

Assumption (B)

We assume that the diffusion coefficient of (1) is of the form $\sigma(t,x) = \sigma_1(t)\sigma_2(x)$ and the following assumption.

(B1) For $t \in [0,\infty)$, $b(t,\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ uniformly with respect to $t \in [0,\infty)$.

(B2) $\sigma_1(\cdot) \in C_b^0([0,\infty);\mathbb{R})$ and there exists $c_1 > 0$ such that $|\sigma_1(t)| \geq c_1$ for any $t \in [0,\infty)$.

(B3) $\sigma_2(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ and there exists $c_2 > 0$ such that $|\sigma_2(x)| \geq c_2$ for any $x \in \mathbb{R}$.

The following proposition provides an expression of p_{M_T}.

Proposition 1. *(Proposition 4 of [3]) Suppose (B). Let $a_0 > x_0$ be fixed arbitrarily. Then, there exists a random variable $H_T(1,a_0) \in L^p(\Omega,P), \forall p \geq 1$ such that*

$$p_{M_T}(x) = E^P\left[\mathbf{1}_{\{M_T > x\}} H_T(1,a_0)\right],$$

for every $x > a_0$.

Theorem 2. *Suppose (B). Let $a_0 > x_0$ be fixed arbitrarily. Then, there exists a random variable $H_T^n(1,a_0) \in L^p(\Omega,P), \forall p \geq 1$ such that*

$$p_{M_T^n}(x) = E^P\left[\mathbf{1}_{\{M_T^n > x\}} H_T^n(1,a_0)\right],$$

for every $x > a_0$. Moreover, $H_T^n(1,a_0)$ converges to $H_T(1,a_0)$ almost surely and in $L^p(\Omega,P), \forall p \geq 1$.

Corollary 1. *Let $a_0 > x_0$ be fixed. Then, we have, for $x > a_0$*

$$p_{M_T^n}(x) \to p_{M_T}(x),$$

as $n \to \infty$.

Theorem 3. *Suppose (B). Then, $p_{M_T}(x) > 0$ for all $x > x_0$.*

Theorem 4. *Suppose (B). Then, it holds that*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{p_{M_T}(x)}{p_{X_T}(x)} \geq 1.$$

References

[1] Gobet, E., Kohatsu-Higa, A.: Computation of greeks for barrier and look-back options using Malliavin calculus. Electron. Commun. Probab. **8**, 51-62 (2003).

[2] Hayashi, M., Kohatsu-Higa, A.: Smoothness of the distribution of the supremum of a multi-dimensional diffusion process. Potential Anal. **38** (1), 57-77 (2013).

[3] Nakatsu, T.: Integration by parts formulas concerning maxima of some SDEs with applications to study on density functions. Stoch. Anal. Appl. **34**(2), 293-317 (2016).

[4] Nakatsu, T.: Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations. Preprint.

[5] Nualart, D.: The Malliavin Calculus and Related Topics, 2nd edn. Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin (2006).

[6] Porper, F.O., Èidel'man, S.D.: Properties of solutions of second-order parabolic equations with lower-order terms. Trans. Moscow Math. Soc. 101-137 (1993).

[7] Shigekawa, I.: Stochastic analysis. Translations of Mathematical Monographs, vol. 224. American Mathematical Society (2004).

Remark on pathwise uniqueness for SDEs driven by Lévy processes

ATSUSHI TAKEUCHI* and HIROSHI TSUKADA†

Consider 1-dimensional stochastic differential equations (SDEs) driven by Lévy processes:

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s)\,ds + \int_0^t b(X_s)\,dW_s + \int_0^t c(X_{s-})\,dZ_s, \tag{1}$$

where $W = \{W_t\,;\, t \geq 0\}$ is a 1-dimensional Brownian motion and $Z = \{Z_t\,;\, t \geq 0\}$ is a 1-dimensional Lévy process. We shall investigate the pathwise uniqueness for the SDE. Recall the known results on the pathwise uniqueness for the SDEs (1) where Z is a stable process of index $1 < \alpha < 2$ with parameters (r_-, r_+) characterized by the triplet $\left(\gamma_\alpha, 0, \nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz)\right)$ as follows: r_+, r_- are non-negative constants with $r_- \leq r_+$, and

$$\nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz) = |z|^{-\alpha-1}\left\{r_-\,\mathbb{I}_{(z<0)} + r_+\,\mathbb{I}_{(z>0)}\right\}dz, \quad \gamma_\alpha = -\int_{|z|>1} z\,\nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz).$$

- It is well-known that the pathwise uniqueness holds if a, b, c are Lipschitz condition.
- As for the case without the process Z, that is, when $c = 0$, Yamada and Watanabe [5] have proved the pathwise uniquness if a is locally Lipschitz continuous and b is locally $1/2$-Hölder continuous.
- In case where the driving process is a symmetric pure-jump type, that is, when $a, b = 0$ and $r_- = r_+$, Komatsu [2] has done if c is locally $1/\alpha$-Hölder continuous.
- As for the case without the process W, that is, when $b = 0$, Fournier [1] has proved the pathwise uniqueness if a is decreasing and continuous and c is increasing and $(\alpha - \beta)/\alpha$-Hölder-continuous where $\beta = \beta(\alpha, r_-/r_+) \in [\alpha - 1, 1]$ satisfies that $\int_{\mathbb{R}_0}\left\{|1+z|^\beta - 1 - \beta z\right\}\nu^\alpha_{r_-,r_+}(dz) = 0$.
- When the process Z is a spectrally stable process that is, $r_- = 0$, Li and Mytnik [3] have done if a is decreasing and continuous and b is locally $1/2$-Hölder continuous and c is increasing and locally $(\alpha-1)/\alpha$-Hölder continuous.

In this talk, we study the problem on the pathwise uniqueness of the solutions to the SDEs (1) where Z is a Lévy process characterized by the triplet $\left(\gamma^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho, 0, \nu^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho(dz)\right)$ where $\nu^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho$ is the Lévy measure given by

$$\nu^{\alpha_-,\alpha_+}_\rho(dz) = \rho(z)\left(|z|^{-\alpha_- -1}\,\mathbb{I}_{(z<0)} + |z|^{-\alpha_+ -1}\,\mathbb{I}_{(z>0)}\right)dz,$$

where ρ is a bounded measurable function such that

$$\rho(0+) = \lim_{z\to 0+}\rho(z) > 0, \quad \rho(0-) = \lim_{z\to 0-}\rho(z) \geq 0,$$

*E-mail address: takeuchi@sci.osaka-cu.ac.jp, Postal address: Department of Mathematics, Osaka City University, Sugimoto 3-3-138, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan.

†E-mail address: d15sac0p04@st.osaka-cu.ac.jp, Postal address: Department of Mathematics, Osaka City University, Sugimoto 3-3-138, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan.

and α_-, $\alpha_+ \in (1,2)$ such that $\alpha_- \leq \alpha_+$, and $\gamma_\rho^{\alpha_-,\alpha_+}$ is the drift parameter given by $\gamma_\rho^{\alpha_-,\alpha_+} = -\int_{|z|>1} z\,\nu_\rho^{\alpha_-,\alpha_+}(dz)$. Our class of driving processes includes parts of stable processes, truncated stable ones, tempered stable ones and relativistic stable ones. In this talk, we shall obtain the condition on the drift coefficient a and the Hölder conditions on diffusion coefficients b, c under which the pathwise uniqueness can be justified for the SDE driven by such processes.

- For each $N > 0$, there exists a positive constant $K_1(N)$ satisfying with

$$|b(x) - b(\tilde{x})| \leq K_1(N)\,|x - \tilde{x}|^{(2-\beta)/2}, \quad \text{for all } |x|, |\tilde{x}| \leq N. \tag{2}$$

- For each $N > 0$, there exists a positive constant $K_2(N)$ satisfying with

$$|c(x) - c(\tilde{x})| \leq K_2(N)\,|x - \tilde{x}|^{(\alpha_+ - \beta)/\alpha_+}, \quad \text{for all } |x|, |\tilde{x}| \leq N. \tag{3}$$

Theorem 1 *Let $\alpha_- = \alpha_+ =: \alpha$ and $\rho(0-) \leq \rho(0+)$. Write $\beta_0 = \beta(\alpha, \rho(0-)/\rho(0+))$ where*

$$\beta(\alpha, \rho(0-)/\rho(0+)) := \frac{1}{\pi} \arccos\left[\frac{\rho(0-)^2 \sin^2(\pi\alpha) - \{\rho(0+) + \rho(0-)\cos(\pi\alpha)\}^2}{\rho(0-)^2 \sin^2(\pi\alpha) + \{\rho(0+) + \rho(0-)\cos(\pi\alpha)\}^2}\right].$$

Suppose that the coefficients of the SDE (1) satisfy the conditions (2), (3) with $\beta \in (0, \beta_0)$, and that the function a is decreasing and the function c is increasing. Then, the pathwise uniqueness of the solutions to the SDE (1) can be justified.

Theorem 2 *Let $\alpha_- < \alpha_+$. Suppose that the coefficients a, b, c satisfy the conditions (2), (3) with $\beta \in (0, 1)$, and that the function a is decreasing and the function c is increasing. Then, the pathwise uniqueness of the solutions to the SDE (1) can be justified.*

References

[1] N. Fournier: On pathwise uniqueness for stochastic differential equations driven by stable Lévy processes, *Annales de l'Institute Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques* **49** (2013), 138 – 159. DOI: 10.1214/11-AIHP420.

[2] T. Komatsu: On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations of jump type, *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* **58** (1982), 383 – 386. DOI: 10.3792/pjaa.58.353.

[3] Z. Li and L. Mytnik: Strong solutions for stochastic differential equations with jumps, *Annales de l'Institute Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques* **47** (2011), 1055 – 1067. DOI: 10.1214/10-AIHP389.

[4] A. Takeuchi and H. Tsukada: Remark on pathwise uniqueness of stochastic differential equations driven by Lévy processe, in preparation.

[5] T. Yamada and S. Watanabe: On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, *Journal of Mathematics of Kyoto University* **11** (1971), 155 – 167. DOI: 10.1215/kjm/1250523691.

ゼータ分布に従う確率変数の一次結合と無限分解可能性

吉川 和宏
立命館大学 理工学部

1. 概要

確率変数 $X_1, \ldots, X_d$ の同時分布が多次元正規分布となる必要十分条件は、任意の一次結合 $\sum_{k=1}^{d} a_k X_k$ $(a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R})$ の分布が一次元正規分布になることでよく知られている。しかし正規分布がもつ無限分解可能性に関して同様な十分条件は成立しない。つまり任意の一次結合の分布は無限分解可能であるが、それらの同時分布は無限分解可能でないものが存在する ([4] において、ウィッシャート分布が例として挙げられている)。そこで本講演では、任意の一次結合の分布が無限分解可能であれば、それらの同時分布が無限分解可能になるような確率分布のクラスを考える。その例のひとつとしてゼータ分布を紹介する。

2. ゼータ関数とゼータ分布

定義 2.1 (リーマン・ゼータ関数, [2] 等参照)**.** $s = \sigma + \mathrm{i}t \in \mathbb{C}$ $(\sigma > 1, t \in \mathbb{R})$ に対し、リーマン・ゼータ関数は以下のディリクレ級数 (1) で定義されて、オイラー積 (2) をもつ。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

$$= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}. \tag{2}$$

ここで $\mathbb{P}$ は素数全体である。

この無限級数及び無限積の絶対収束領域 $\sigma > 1$ において、リーマン・ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が定義される。

定義 2.2 (リーマン・ゼータ分布)**.** $\sigma > 1$ に対して、以下で与えられる確率測度 μ_σ をリーマン・ゼータ分布という。

$$\mu_\sigma \left(\{-\log n\}\right) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

リーマン・ゼータ分布は、古くは Khinchine [5] の文献等に記されている。この分布の特徴として、特性関数が $f_\sigma(t) = \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)/\zeta(\sigma)$ $(t \in \mathbb{R})$ となることや無限分解可能であること等が挙げられる。

命題 2.3 ([3] 等参照)**.** リーマン・ゼータ分布 μ_σ は複合ポアソン分布である。またそのレヴィ測度 N_σ は、

$$N_\sigma(dx) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p^{-r\sigma}}{r} \delta_{r \log p}(dx)$$

となる。ここで δ_x は点 x におけるデルタ分布である。

近年では、[1] において青山と中村が多次元新谷ゼータ関数を導入することにより、リーマン・ゼータ分布を拡張する形で、ある多次元離散分布のクラス (多次元新谷ゼータ分布) を定義している。

定義 2.4 (多次元新谷ゼータ関数, [1]). $d,\, m,\, r \in \mathbb{N},\, \vec{s} \in \mathbb{C}^d,\, (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ とする。このとき $\lambda_{lj}, u_j > 0,\, \vec{c}_l \in \mathbb{R}^d$ $(1 \leq j \leq r,\, 1 \leq l \leq m)$、及び $|\theta(n_1, \ldots, n_r)| = O((n_1 + \cdots + n_r)^{\varepsilon})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ を満たす複素数値関数 $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ に対し、多重無限級数

$$Z_S(\vec{s}) = \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{\prod_{l=1}^{m} (\sum_{k=1}^{r} (\lambda_{lk}(n_k + u_k))^{\langle \vec{c}_l, \vec{s} \rangle}}$$

を多次元新谷ゼータ関数という。

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積とし、$\vec{s} = \vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t},\, \vec{\sigma}, \vec{t}, \vec{c} \in \mathbb{R}^d$ に対して、$\langle \vec{c}, \vec{s} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{\sigma} \rangle + \mathrm{i} \langle \vec{c}, \vec{t} \rangle$ とする。また $Z_S(\vec{s})$ は、$\min_{1 \leq l \leq m} \langle \vec{c}_l, \vec{\sigma} \rangle > r/m$ を絶対収束領域 ($\mathrm{D_S}$ とおく) としてもち、その領域において $\theta(n_1, \cdots, n_r)$ を定符号とするとき $\mathbb{R}^d$ 上の分布が次のように定義できる。

定義 2.5 (多次元新谷ゼータ分布, [1]). $\vec{\sigma} \in \mathrm{D_S}$ に対し、以下で与えられる $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $\mu_{\vec{\sigma}}$ を多次元新谷ゼータ分布という。

$$\begin{aligned} &\mu_{\vec{\sigma}}\biggl(\Bigl\{ -\sum_{l=1}^{m} c_{l1} \log\Bigl(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k + u_k)\Bigr), \ldots, -\sum_{l=1}^{m} c_{ld} \log\Bigl(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k + u_k)\Bigr) \Bigr\}\biggr) \\ &= \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{Z_S(\vec{\sigma})} \prod_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k + u_k) \right)^{-\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma} \rangle}, \quad (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r. \end{aligned}$$

この分布の特性関数は $f_{\vec{\sigma}}(\vec{t}) = Z_S(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}) / Z_S(\vec{\sigma})$ $(\vec{t} \in \mathbb{R}^d)$ で与えられる。

3. リーマン・ゼータ分布に従う確率変数の一次結合

リーマン・ゼータ分布をもつ確率変数の一次結合と無限分解可能性について、次の結果を得ている。

定理 3.1. リーマン・ゼータ分布 $\mu_{\sigma_1}, \ldots, \mu_{\sigma_d}$ $(\sigma_1, \ldots, \sigma_d > 1)$ に従う確率変数を $X_1, \ldots, X_d$ とする。このとき次の条件 (1) と (2) は同値である。

(1) $X_1, \ldots, X_d$ の同時分布が無限分解可能である。

(2) $X_1, \ldots, X_d$ の任意の一次結合 $\sum_{k=1}^{d} a_k X_k$ $(a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R})$ の分布が無限分解可能である。

リーマン・ゼータ分布に従う確率変数 $X_1, \ldots, X_d$ の同時分布及び一次結合の分布はそれぞれ d 次元、1 次元の多次元新谷ゼータ分布のクラスに含まれる。しかし、すべての多次元新谷ゼータ分布が無限分解可能ではない。本講演では多次元新谷ゼータ分布が無限分解可能となる条件と一次結合の関係性について解説する予定である。

参考文献

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, Tokyo J. Math. **36** (2013), 521–538.

[2] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, (1976).

[3] D. Applebaum, Lévy Processes and Stochastic Calculus, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2009).

[4] M. Dwass and H. Teicher, On infinitely divisible random vectors, Ann. Math. Statist. **28** (1957), 461–470.

[5] A. Ya. Khinchine, Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian), Moscow and Leningrad, (1938).