Compound Poisson model の Gerber-Shiu 関数

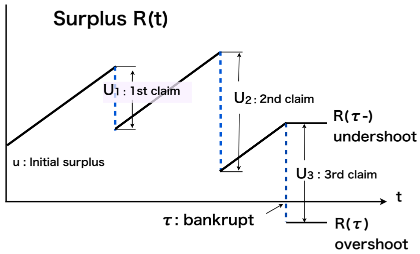
西岡 國雄 (中大商),　中島 禎志 (電機大理工)

1　Gerber-Shiu 関数とは

正の定速ドリフトから, 正の飛躍を持つ複合 Poisson 過程を減じた加法過程 $\{R(t)\}$

(1.1) $$R(t) = u + t - \sum_{k=0}^{N(t)} U_k, \quad u \geq 0, \quad U_0 \equiv 0,$$

を surplus 過程[*1]と呼ぶ: ここで, $\{N(t), t \geq 0\}$ は Poisson rate ρ の Poisson 過程, $\{U_k,\, k = 1, 2, \cdots\}$ は共通分布が F の非負 *i.i.d.* r.v.'s で $\{N(t)\}$ とは独立. 平均 $\mathbf{E}[U_1] \equiv \mu_F$ の存在と "safty loading $1 - \rho\,\mu_F > 0$" を仮定する.



保険会社の破産時刻を $\tau \equiv \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$ で定義する. すると破産直前の surplus $R(\tau-)$ と破産額 $|R(\tau)|$ を変数とする penalty 関数 $w(x, y)$ を適当に設定し[*2], それを現在価値に割り引いた関数 ϕ で, "保険会社の破産の深刻さ" が定量化される:

(1.2) $$\phi(u) = \mathbf{E}_u\left[\, e^{-\alpha\,\tau}\; w(R(\tau-),\, |R(\tau)|)\,\right], \quad \alpha \geq 0 \text{ is discount rate.}$$

ϕ は, 提案者に因んで Gerber-Shiu 関数と呼ばれ ([3], [4]), 再保険料の算定など多くの応用がある. "u, ρ, F, α と $\phi(u)$ との関数関係" の解明を目標とした研究は盛んに行われているが, F が指数分布およびその類似物以外では, 未だに未解決のままである.

本講演では, w を

(1.3) $$w(x, y) \equiv I_{\{x>a,\, y>b\}}, \qquad a, b \geq 0 \text{ are arbitrarily fixed constants,}$$

とし, F が "δ 分布の凸結合" (*c.f.* 定義 2.1, この空間を $\mathscr{P}_D$ と表記する) であるとき, ϕ の具体形を与える. $\mathfrak{r}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ を Lévy metric とするとき, $\mathbb{R}^1_+$ 上の確率測度空間 $(\mathscr{P}, \mathfrak{r})$ のなかで $\mathscr{P}_D$ は dense subset だから, $F^\dagger \in \mathscr{P}_D$ で一般の $F \in \mathscr{P}$ を任意精度で近似できる. すなわち "一般の F に対する ϕ の任意精度近似" を, シュミレーションが適用可能な具体型で求める.

2　主結果

Surplus 過程 (1.1) の path を分解することで, ϕ が満たす積分微分方程式 $(*)$ が得られる: $(*)$ は一意解を持つが, それを得るため, Laplace 変換を行う:

(2.1) $$0 = \widehat{\phi}(s)\left\{\rho\,\widehat{F}(s) - (\rho + \alpha) + s\right\} + \rho\,\widehat{w^\star}(s) - \phi(0), \quad \widehat{\phi}(s) = \int_0^\infty du\; e^{-s\,u}\;\phi(u),$$

ここで, $\widehat{w^\star}(s) \equiv \displaystyle\int_0^\infty du\, e^{-s\,u} \int_u^\infty F(dx)\, w(u, x-u)$. とくに, w を (1.3) とすれば,

$$\widehat{w^\star}(s) = \int_{a+b}^\infty F(dx)\,\frac{1}{s}\{e^{-s\,a} - e^{-s\,(x-b)}\}$$

[*1] この加法過程は Cramér-Lundberg モデルと呼ばれ, 時刻 t での保険会社の資産を表す.

[*2] Penalty 関数としては, $w = x - y$, $w = 1 - \exp\{-(x - |y|) - c\,|y|\}$, $c \geq 0$, なども提案されている.

となる．しかし (2.1) では $\widehat{\phi}(s)$ および $\phi(0)$ が未知である．そこで s に関する方程式

$$\text{(2.2)} \qquad \text{Lundberg eqauiton} \qquad \rho\,\widehat{F}(s) - (\rho+\alpha) + s = 0,$$

の正解を r_α (α exponent) とする．$s = r_\alpha$ のとき, (2.1) で $\{\quad\} = 0$ となり $\phi(0)$ を得ることが出来る[*3]:

$$\text{(2.3)} \qquad \phi(0) = \rho\,\widehat{w^\star}(r_\alpha) = \rho \int_{a+b}^{\infty} F(dx)\,\frac{1}{r_\alpha}\{e^{-r_\alpha\,a} - e^{-r_\alpha\,(x-b)}\}.$$

定義 2.1. F が "δ 分布の凸結合" とは, ある整数 $M > 0$, 定数 $0 < a_1 < \ldots < a_M$, および, 定数 $0 < p_k < 1,\ k = 1,\ldots,M,$ に対し,

$$\text{(2.4)} \qquad F(dx) = \sum_{k=1}^{M} p_k\,\delta(x,a_k)\,dx, \quad p_1 + \cdots + p_M = 1,$$

となることである．但し $\delta(x;a)$ は "位置 a に単位質量がある δ 関数". (2.4) の全体を $\mathscr{P}_D$ で表す． $\diamond$

(2.1), (2.2) の α exponent r_α と $F^\dagger \in \mathscr{P}_D$ であることを利用. 多重指数の記法を用いて,

定理 2.2 (主定理)**.** $\mathscr{P}_D \ni F^\dagger$ は (2.4) とする．$\Rightarrow$ (1.3) にたいする Gerber-Shiu 関数の具体形は

$$\phi(u) = \mathbf{E}_u\left[e^{-\alpha\,\tau}\ I_{\{R(\tau-)>a,\,|R(\tau)|>b\}}\right] = \rho\sum_{k=0}^{M}\frac{p_k}{r_\alpha}(e^{-r_\alpha\,a} - e^{-r_\alpha\,(a_k-b)})\ I_{\{a+b\le a_k\}}\ K(u) -$$
$$-\sum_{k=0}^{M} p_k \int_0^u dv\ (I_{\{v\ge a\}} - I_{\{v\ge a_k-b\}})\ I_{\{a+b\le a_k\}}\ K(u-v)$$
$$\text{ここで}\quad K(u) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^M} (-\rho)^k\ \frac{\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\ e^{(\rho+\alpha)\,(u-\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle)}\ (u-\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle)^k\ I_{\{u\ge\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle\}}.$$

なお $I_{\{u\ge\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}\rangle\}}$ の項があるため, 上記 $K(u)$ の右辺に現れる $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}(\quad)$ は有限和である． $\diamond$

注意 2.3. (i) 一般の $F \in \mathscr{P}$ に対し, (2.2) を代数的に解くことはほぼ不可能．そこで r_α に収束する近似区間列 $\{(\ell_k^\dagger, r_k^\dagger)\}$ を構成するが, $r_{k+1}^\dagger - \ell_{k+1}^\dagger < c\,(r_k^\dagger - \ell_k^\dagger)^2$ となり, その収束は極めて早い.
(ii) 一般の $F \in \mathscr{P}$ に対しは, $F^\dagger \in \mathscr{P}_D$ で "$\mathfrak{r}(F,F^\dagger) < \varepsilon,\quad \mu_F = \mu_{F^\dagger}$" となるものを構成し, その $F^\dagger$ に 定理 2.2 を適用する． $\diamond$

文献

[1] S. Asmussen and H. Albrecher, Ruin Probabilites (2nd ed.), 2010, World Scientific.

[2] Cramér, H., Historical review of Fillip Lundberg's work on risk theory, Skand. Aktua. (Suppl.), 52 (1969), 6-12.

[3] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, Insurance: Mathematics and Economics, 21 (1997), 129-137.

[4] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., On the time value of ruin, Noth American Actuarial J., 2 (1998), 48-72

[*3] $\alpha = 0$ の場合 $\phi(0)$ の具体型が知られている, [1]. また Wiener-Hope 定理の応用から, $\phi(0)$ を求めることも出来るが, 本質的に無限級数であり, 実際の計算は困難.

古典 Lundberg model の結合分布の一般公式について

佐藤　定夫 *

2017.12.11 東北大学 確率論シンポジウム

1 Lundberg model

N_t を $\nu-$ Poisson process とし Y_j を分布 F の i.i.d. とする.

$$S_t = t - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \tag{1}$$

$S_0 = 0$ なので $k \leq 0$ に対し, 破産時刻を定義する.

$$T_k = \inf\{t > 0; S_t < k\}$$

.

簡単のため $Y > 0$ a.s. とし、F の Laplace 変換 $\phi(\beta)$ は $\beta = 0$ の近傍で analytic とする. また、存続確率 $(P(T_k = \infty))$ が正となる条件

$$\nu E(Y) < 1 \tag{2}$$

を常に仮定する. F は density f をもつとして式を書くが, 一般化は容易である.

We study the following generating function:

$$U(k, \zeta, \beta, \gamma) = E(e^{-\zeta T_k - \beta(k - S_{T_k}) - \gamma(S_{T_{k-}} - k)}) \tag{3}$$

ここで $V_k = k - S_{T_k}$ は overshoot と呼ばれ $V_{k-} = S_{T_{k-}} - k$ は the surplus prior to ruin と呼ばれる (GS). U の逆変換を求めれば, Gerber-Shiu を含む一般の T_k, V_k, V_{k-} の結合分布がわかるがこれが一般の F に対して可能であることを以下に示す.

2 $U, \mathscr{L}U$ formula

Theorem 1.

$$\mathscr{L}U(\alpha, \zeta, \beta, \gamma) = \frac{1}{1 - U(0, \zeta, \alpha, 0)} \cdot \frac{U(0, \zeta, \beta, \gamma) - U(0, \zeta, \alpha + \gamma, \gamma)}{\alpha + \gamma - \beta} \tag{4}$$

ここで $\mathscr{L}U$ は $U(k, , ,)$ の $(-\infty, 0]$ での $\mathscr{L}$ 変換.

Define

$$Z(\zeta, \gamma) = \lim_{\beta \to \infty} \beta U(0, \zeta, \beta, \gamma) \tag{5}$$

and

$$z(\zeta) = Z(\zeta, 0) \tag{6}$$

Theorem 2. The function $z(\zeta)$ is a positive decreasing convex function and satisfies that

$$z(\zeta) = \nu\phi(\nu + \zeta - z(\zeta)) \tag{7}$$

and

$$z(\zeta) = \nu + \zeta - \frac{\zeta}{1 - U(0, \zeta, 0, 0)}. \tag{8}$$

*東京電機大学 理工学部 情報システムデザイン学系, sato@u.dendai.ac.jp

Moreover, we have

$$Z(\zeta,\gamma) = \nu\phi(\nu+\zeta+\gamma-z(\zeta)), \tag{9}$$

$$0 < Z(0,\gamma) \le \nu\phi(\gamma) \tag{10}$$

and

$$U(0,\zeta,\beta,\gamma) = \frac{\nu\phi(\beta) - Z(\zeta,\gamma)}{\nu+\zeta+\gamma-z(\zeta)-\beta} \tag{11}$$

3 density of (T_k, V_k, V_{k-})

Define

$$G_0(t,s) = \delta_0(t-s) + \nu s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu t)^{n-1}}{n!} f^{n*}(t-s). \tag{12}$$

Then we have

Theorem 3. The density of (T_0, V_0, V_{0-}) is

$$f_0(t,x,s) = \nu e^{-\nu t} G_0(t,s) f(x+s). \tag{13}$$

Define

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu t)^{n-1}}{n!} f^{n*}(t). \tag{14}$$

Define

$$G_1(k,t) = \int_k^0 dv g(t-v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu v)^n}{n!} f^{n*}(v-k) \tag{15}$$

Theorem 4. The density of (T_k, V_k, V_{k-}) is

$$f_k(t,x,s) = \nu e^{-\nu t} f(x+s) \left(1_{\{s+k\ge 0\}} G_0(t,s+k) + \nu \int_k^{(s+k)\wedge 0} dv \int_0^t du G_0(t-u, s+k-v) G_1(v,u) \right) \tag{16}$$

Thus V_k have the tail distribution of f. T_k and V_k are conditionally independent given V_{k-}.

参考文献

[Mi] T. ミコシュ, 山岸訳, 損害保険数理, 丸善,2012

[Pra] Prabhu,N.U.,Queues and Inventories, New York,John Wiley &Sons,1965.

[As] Asmussen & Albrecher,Ruin Probabilities,World Scientific,Singapore,2010

[WW] Whittaker & Watson,A course of Modern Analysis,London,Cambridge Univ.,1927.

[B] Berndt, Bruce C., Ramanujan's Notebooks, Part I, New York, Springer,2005.

[F] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Aplications, Vol. II, John Wiley & Sons, 1971.

[GS] Gerber, H. U. and Shiu, E., On the time value of ruin, North American Actuarial Journal, 9 (2005), 49-69.

[L] Lundberg, F., Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. Skand. Aktua., 13 (1930), 1-83.

[NI] Nishioka, K. and Igarashi, T., Non-ruin probability of an insurer under the Lundberg model, 京都大学, 数理研考究録, 1903 (2014), 140–147.

[NNS] 西岡國雄, 中島禎志, 佐藤定夫, 保険会社の存続問題２, 日本数学会秋季大会, 京都産業大学,2015

[S] 佐藤定夫,Lundberg model と Ramanujan, 数理科学会論文集,Vol.17,No.1,2016,21-24

Large financial market における無裁定理論

浜口 雄史[*]　京都大学理学研究科数学教室 修士課程 2 年

古典的なマーケットモデルは, 有限個の株式などの危険資産を仮定し, その割引価格を有限次元確率過程でモデル化する. 一方本講演では可算無限個の証券を仮定した large financial market における無裁定理論について, 特に基準財変更との関連についての新しいアプローチを紹介する.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとする. 可算無限個の危険資産の価格過程を実数値セミマルチンゲールの列 $\mathbb{S} = (S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ で表し, これを large financial market と呼ぶ. また相異なる自然数からなる有限集合 K に対し, $\mathbb{S}^K = (S^n)_{n\in K}$ を K-small market と呼ぶ. 補助的に安全資産 (基準財) の価格過程として $S^0 \equiv 1$ を考える. すなわちすべての価格は基準財 S^0 による割引価格を表すものとする.

まず, 各 small market $\mathbb{S}^K$ における投資戦略を, 古典的なマーケットモデルと同様に定義する.

定義 1. $\mathbb{R}^{|K|}$-値可予測過程 H で, 有限次元セミマルチンゲールに関するベクトル確率積分の意味で $\mathbb{S}^K$-*integrable* ($H \in L(\mathbb{S}^K)$ と書く) なものを, *small market* $\mathbb{S}^K$ における投資戦略 (*trading strategy*) と呼ぶ. さらに確率積分過程 $H \cdot \mathbb{S}^K$ がある正定数 λ により $H \cdot \mathbb{S}^K \geq -\lambda$ となるとき, 投資戦略 H は λ-*admissible* であるという. $\mathbb{S}^K$ における λ-*admissible* な投資戦略全体の集合を $\mathcal{H}^K_\lambda$ と表し, $\mathcal{H}^{small}_\lambda = \bigcup_K \mathcal{H}^K_\lambda$ と定義する.

投資戦略 H は各資産の各時刻における保有量を表し, 確率積分 $H \cdot \mathbb{S}^K$ は戦略 H に対応する累積 (割引) 損益額を表す. また admissibility 条件は累積損失額が非有界となるような「非合法的な」戦略を排除することに対応しており, 無裁定理論と関連するマルチンゲール理論において本質的な役割を持つ. λ は損失額のボーダーライン (credit line) とみなすことができる. 詳細は参考文献 [1] を参照されたい.

上で定義した $\mathcal{H}^{small}_\lambda$ は, 全期間においてある有限個の証券のみを取引する投資戦略のクラスであることに注意する. large financial market では取引可能な資産が無限個存在するため, 各時刻 $t \in [0,T]$, および各 $\omega \in \Omega$ によって保有する資産の集合が異なるような投資戦略のクラスを考えるべきである. ここでは De.Donno-Pratelli[2] により導入された, 無限次元セミマルチンゲールに関する generalized stochastic integral による定義を採用する.

定義 2. 各 H^n をある *small market* $\mathbb{S}^{K_n}$ における投資戦略とする. $\mathbb{H} = (H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が *[2]* の意味で $\mathbb{S}$-*integrable* ($\mathbb{H} \in L(\mathbb{S})$ と書く) である, すなわち確率積分過程の列 $(H^n \cdot \mathbb{S}^{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ がセミマルチンゲール位相で *Cauchy* 列となるとき, $\mathbb{H} = (H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を一般化投資戦略 (*generalized strategy*) と呼ぶ. またその極限セミマルチンゲールを $\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}$ と書き, $\mathbb{H}$ の $\mathbb{S}$ に関する一般化確率積分 (*generalized stochastic integral*) と呼ぶ. さらに近似列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が一様に λ-*admissible* であるとき, $\mathbb{H}$ は λ-*admissible* であるという. λ-*admissible* な一般化投資戦略全体の集合を $\mathcal{H}^{large}_\lambda$ と書く.

裁定機会とは, 直観的には「無リスクで正の富を得るような投資戦略」のことを指す. このような理想的な戦略が存在すれば, 多くの (理性的な) 投資家がこの戦略を取ることによ

[*]hamaguchi@math.kyoto-u.ac.jp

り, 需要と供給の関係から価格が変動, その結果裁定機会は直ちに消失するであろう. したがって数理ファイナンスにおける標準的なマーケットモデルは裁定機会が存在しないことが要請される. large financial market では様々な裁定機会の概念が存在するが, 本講演では次の主要な 4 つの裁定機会について議論する.

定義 3. (*i*) *small market* $\mathbb{S}^K$ における 1-*admissible strategy* $H \in \mathcal{H}_1^K$ が

$$(H \cdot \mathbb{S}^K)_T \geq 0 \ a.s. \text{ かつ } \mathbb{P}\{(H \cdot \mathbb{S}^K)_T > 0\} > 0$$

を満たすとき, H を $\mathbb{S}^K$ における裁定機会 *(arbitrage in a small market)* と呼ぶ.

(*ii*) 1-*admissible generalized strategy* $\mathbb{H} \in \mathcal{H}_1^{large}$ が

$$(\mathbb{H} \cdot \mathbb{S})_T \geq 0 \ a.s. \text{ かつ } \mathbb{P}\{(\mathbb{H} \cdot \mathbb{S})_T > 0\} > 0$$

を満たすとき, $\mathbb{H}$ を一般化裁定機会 *(generalized arbitrage, (GA))* と呼ぶ.

(*iii*) *small market* における投資戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の *2* 条件を満たすとき, $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を第一種近似裁定機会 *(asymptotic arbitrage of the first kind, (AA1))* と呼ぶ;

(*iii-a*) ある定数の列 $\epsilon_n \downarrow 0$ が存在し, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $H^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{small}$ となる;

(*iii-b*) ある定数の列 $c_n \uparrow \infty$ および正定数 α が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S}^{K_n})_T \geq c_n\} \geq \alpha > 0$$

が成立する.

(*iv*) *small market* における投資戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の *2* 条件を満たすとき, $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を第二種近似裁定機会 *(asymptotic arbitrage of the second kind, (AA2))* と呼ぶ;

(*iv-a*) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $H^n \in \mathcal{H}_1^{small}$ となる;

(*iv-b*) ある定数 $c > 0$ が存在し,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S}^{K_n})_T \geq c\} = 1$$

が成立する.

上のような裁定機会が存在しないとき, large financial market $\mathbb{S}$ はそれぞれ無裁定型条件 $(NA)_{small}$, (NGA), $(NAA1)$, $(NAA2)$ を満たすという.

large financial market $\mathbb{X} = ((S^n)_{n\in\mathbb{N}}, 1, V)$ を考える. ここで V は $S^0 \equiv 1$ に代わる新しい基準財の S^0 による割引価格を表し, 正値セミマルチンゲールであるとする. 基準財を S^0 から V に変更すると, 各危険資産および安全資産の V による割引価格はそれぞれ $\frac{S^n}{V}$ および $\frac{1}{V}$ となる. したがって新しい large financial market $\mathbb{Z} = ((\frac{S^n}{V})_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{V}, 1)$ を考えることとなる. 本講演では, 新しいマーケット $\mathbb{Z}$ における無裁定型条件を元のマーケット $\mathbb{X}$ に関する条件として記述し, さらに基準財変更によって無裁定型条件が保存するための条件について説明する.

参考文献

[1] Delbaen-Schachermayer; The Mathematics of Arbitrage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006).

[2] De.Donno-Pratelli; Stochastic integration with respect to a sequence of semimartingales. In memoriam Paul-Andr Meyer: Sminaire de Probabilits XXXIX, 119135, Lecture Notes in Math., 1874, Springer, Berlin, (2006).

非整数ボラティリティに対する統計的推測

阪大・基礎工　高畠　哲也
(共同研究者　阪大・基礎工　深澤　正彰)

1　講演の概要

本講演では、数理ファイナンスの分野で近年注目を集めている、非整数ボラティリティモデルと呼ばれる、株価過程のモデルに対する未知定数の推定問題を考察する。 今、対数株価過程 $X = \log(S)$ は、実測度のもとで、以下の確率過程に従うと仮定する。

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\,ds + \int_0^t \sqrt{\exp(V_s)}\,dB_s,$$
$$V_t = V_0 + \int_0^t a_s\,ds + \eta W_t^H,\quad (H,\eta) \in (0,1) \times (0,\infty).$$

ただし、B は標準 Brown 運動、W^H は Hurst 指数 H の非整数 Brown 運動である。ここで、対数ボラティリティ過程 V に含まれる H と η が我々が推定したい未知の定数であり、これらを有限期間で観測される高頻度株価取引データから推定することが、本研究の目的である。

2　問題設定と主結果

2.1　問題設定

本研究では、以下のデータ $\mathbf{Y}_\ell = (Y_0^\ell, Y_1^\ell, \cdots, Y_n^\ell)$ が観測される状況を考える。

$$Y_j^\ell = \log\left[\frac{1}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n} \exp(V_s)\,ds\right] + \sqrt{\frac{2}{m}}\zeta_j,\quad j \in \{0,1,2,\cdots,n-1\},\quad \ell = (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2. \tag{1}$$

ここで、δ_n はデータの観測間隔で、$\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は独立同分布な標準正規ノイズを表す。この観測モデルは、セミマルチンゲールの二次変動に関する安定収束定理と Delta 法から導出される。もしノイズ $\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ の影響がなければ、観測 $\mathbf{Y}_\ell$ は観測間隔 δ_n 毎の対数株価過程 X の二次変動を δ_n で割り、さらに対数変換を施したものに等しい。また、観測間隔 δ_n が十分小さければ、Taylor 近似と Euler-Maruyama 近似により、

$$\Delta Y_j^\ell \approx \frac{1}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n} (V_s - V_{s-\delta_n})\,ds + \sqrt{\frac{2}{m}}\Delta\zeta_j \quad \approx \frac{\eta}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n} (W_s^H - W_{s-\delta_n}^H)\,ds + \sqrt{\frac{2}{m}}\Delta\zeta_j$$

と近似される。ただし、Δ は時系列の差分をとる作用を表す。本講演では、上記近似を利用し、観測データの差分を近似的に定常 Gauss な時系列とみなした際の近似尤度を用いて、推定量を構成する。

2.2　推定量の構成

以下、$P_\theta^{(\ell)}$ で観測 $\mathbf{Y}_\ell$ の分布を表すこととする。まず、観測値 $\mathbf{y}_n \equiv (y_1,\cdots,y_n) := \mathbf{Y}_\ell(\omega) \in \mathbb{R}^n$ に基づき、$(H,\nu) \equiv (H, \eta\delta_n^H)$ の推定量 $(\widehat{H}_\ell, \widehat{\nu}_\ell)$ を、以下の Whittle 型推定関数

$$U_{\ell,0}(H,\nu) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log g_{H,\nu}^m(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{4\pi n}\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{-1}(i-j)\lambda}\frac{1}{g_{H,\nu}^m(\lambda)}\,d\lambda\right)\Delta y_i \Delta y_j$$

を (H,ν) に関して最小化するものとして定義する。ただし、

$$g^m_{H,\nu}(\lambda) = \nu^2 f_H(\lambda) + \frac{2}{m} l(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

ここで、f_H は定常 Gauss 過程 $\{\frac{1}{\delta_n}\int_{j\delta_n}^{(j+1)\delta_n}(W^H_s - W^H_{s-\delta_n})\,ds\}_{j\in\mathbb{Z}}$、$l$ は $\{\Delta\zeta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ のスペクトル密度をそれぞれ表す。このとき、未知定数 $\theta = (H,\eta)$ に対する推定量 $\widehat{\theta}_\ell$ を、以下で定義する。

$$\widehat{\theta}_\ell = \left(\widehat{H}_\ell, \delta_n^{-\widehat{H}_\ell}\widehat{\nu}_\ell\right), \quad \ell \in \mathbb{Z}^2_+.$$

本講演では、推定量 $\widehat{\theta}_\ell$ に関して得られた、以下の結果を紹介する。

定理 1. $\Theta = [H_-, H_+] \times [\eta_-, \eta_+] \subset (0,1) \times (0,\infty)$ とし、以下の条件を仮定する。

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} n\delta_n \le \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} n\delta_n < \infty, \quad \delta_n \to 0 \ \text{ as } n \to \infty,$$
$$\inf_{H\in[H_-,H_+]} m\delta_n^{2H} = m\delta_n^{2H_+} \to \infty \ \text{ as } n, m \to \infty.$$

このとき、推定量の列 $\{\widehat{\theta}_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}^2_+}$ は未知定数 $\theta = (H,\eta)$ に対して弱一致性を満たす。すなわち、すべての $\theta_0 = (H_0, \eta_0) \in \mathring{\Theta}$ に対し、以下の確率収束が成り立つ：

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し、} \quad \lim_{n,m\to\infty} P^{(\ell)}_{\theta_0}\left[\left\|\widehat{\theta}_\ell - \theta_0\right\| \ge \varepsilon\right] = 0.$$

参考文献

[1] Bayer, C., Friz, P. and Gatheral, J. (2016): Pricing under rough volatility, Quantitative Finance, Vol. 16, Issue 6, p.887-904.

[2] Comte, F. and Renault, E. (1998): Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models, Mathematical Finance, Vol. 8, No. 4, pp. 291-323.

[3] Fukasawa, M. (2011): Asymptotic analysis for stochastic volatility: martingale expansion, Finance and Stochastics, Vol. 15, pp. 635-654.

[4] Fukasawa, M. (2016): Short-time at-the-money skew and rough fractional volatility, Quantitative Finance, Vol. 17, Issue 2, pp. 189-198.

[5] Gatheral, J., Jaisson, T. and Rosenbaum, M. (2014): Volatility is rough, arXiv:1410.3394.

EXPECTED EXPONENTIAL UTILITY MAXIMIZATION OF INSURERS WITH A GENERAL DIFFUSION FACTOR MODEL : THE COMPLETE MARKET CASE.

畑　宏明 (静岡大学)、許　順吉、孫　立憲 (國立中央大學 (台湾))

【本講演の目的】完備市場の場合の一般的な非線形確率ファクターモデル下での指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題の最適戦略と最適値を求める。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ をフィルター付き確率空間とする。ただし、$\mathcal{F}_t := \sigma\{W_s, p_s, Z_j \mathbf{1}_{j\leq p_s}; s \leq t, j \geq 1\}$ である。ここで、$(W_t)_{t\geq 0}$ は $n+m$ 次元標準ブラウン運動, $(p_t)_{t\geq 0}$ は強度 $\lambda > 0$ をもつ Poisson 過程 , $(Z_i)_{i\geq 1}$ は同一分布 ν をもつ独立な非負確率変数の列。また、$(W_t)_{t\geq 0}, (p_t)_{t\geq 0}, (Z_i)_{i\geq 1}$ は互いに独立とする。

今、次の市場モデルを考える。

- 銀行預金過程：$dS_t^0 = S_t^0 r(Y_t)dt, \quad S_0^0 = s_0^0,$
- $i(i = 1, \cdots, m)$ 番目の危険資産価格過程：

$$dS_t^i = S_t^i \left\{ \mu^i(Y_t)dt + \sum_{k=1}^m \sigma_p^{ik}(Y_t)dW_t^k \right\}, \quad S_0^i = s_0^i,$$

- ファクター過程：$dY_t = g(Y_t)dt + \sigma_f(Y_t)dW_t, \quad Y(0) = y \in \mathbb{R}^n.$

ここで、 σ_p は $m \times m$-値行列関数, σ_f は $n \times m$-値行列関数、 r は $\mathbb{R}$-値関数, μ は $\mathbb{R}^m$-値関数, g は $\mathbb{R}^n$-関数である。

更に、リスク過程として、次の Cramér-Lundberg モデルを用いる：

$$R_t := x + ct - J_t,$$

ここで、 x は初期資産、 $c > 0$ は収入保険料率、$J_t := \sum_{i=1}^{p_t} Z_i$ である。 また、$\Delta J_s := J_s - J_{s-}$ と定義するとき、$J.$ に関連する Poisson ランダム測度は $t \geq 0$ とボレル集合 $U \subset [0, \infty)$ に対して、次のように定義する：

$$N([0,t] \times U) := \sum_{0\leq s\leq t} 1_U(\Delta J_s).$$

このとき、次の条件を仮定する。

(A1) $r, \mu, g, \sigma_p, \sigma_f$ は大域的に Lipschitz 条件を満たす。
(A2) $\sigma_p(x)$ は正則行列である。
(A3) $x, \eta \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つような $\mu_1, \mu_2 > 0$ が存在する：

$$\mu_1|\eta|^2 \leq \eta^* \sigma_f(x)\sigma_f(x)^* \eta \leq \mu_2|\eta|^2.$$

(A4) r は非負で有界.

π_t^i を i 番目の危険資産の株の保有量, $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^*$ とすると、時刻 t における保険会社の資産過程 X_t^π は次を満たす。

$$\begin{aligned} X_t^\pi &= R_t + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^m \pi_u^i \frac{dS_u^i}{S_u^i} + (X_u^\pi - \pi_u^* \mathbf{1}) \frac{dS_u^0}{S_u^0} \right\} \\ &= x + \int_0^t \{c + \pi_u^*(\mu(Y_u) - r(Y_u)\mathbf{1}) + r(Y_u)X_u^\pi\} du + \int_0^t \pi_u^* \sigma_p(Y_u)dW_u - \sum_{i=1}^{p_t} Z_i. \end{aligned}$$

本講演では、次の指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題を扱う。

$$\text{(P)} \qquad V(t,x,y) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{t,T}} E\left[-\mathrm{e}^{-\alpha X_T^{t,x,y,\pi}}\right].$$

ただし、$\mathcal{A}_{t,T}$ は許容な投資戦略全体。

【解法の手順】

(1) 動的計画原理を用いて、形式的に下で与えた Hamilton−Jacobi−Bellman(HJB) 方程式 (0.1) を導出する。(※ HJB 方程式 (0.1) の $\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}[\quad]$ において、sup を達成する $\tilde{\pi}$ は最適投資戦略の候補になる。)

(2) HJB 方程式 (0.1) に最適戦略の候補 $\tilde{\pi}$ を代入した方程式の解の存在を証明する。

(3) HJB 方程式 (0.1) を用いて、Verification Theorem (最適戦略の候補 $\tilde{\pi}$ が本当に最適戦略であることを保証する定理) を証明する。

実際、動的計画原理から、問題 (P) に関連する HJB 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\pi^*\sigma_p(y)\sigma_p(y)^*\pi V_{xx} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*V_{yy})\right.\\
&\qquad +\pi^*\sigma_p(y)\sigma_f(y)^*V_{xy} + \{c+\pi^*(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})+r(y)x\}V_x + g(y)^*V_y\\
&\qquad \left.+\lambda\int_{z>0}\{V(t,x-z,y)-V(t,x,y)\}\nu(dz)\right] = 0,\\
&V(T,x,y) = U(x).
\end{aligned} \tag{0.1}$$

このとき、

$$\tilde{V}(t,x,y) := -\mathrm{e}^{-a(t,y)x-b(t,y)},$$

は (0.1) の解になる。ただし、a と b は次を満たす：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*D^2a) + (Da)^*\left\{g(y)-\sigma_f(y)\sigma_p(y)^{-1}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})\right\}\\
&\qquad -\frac{1}{a}(Da)^*\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*Da + r(y)a = 0, \quad a(T,y)=\alpha,\\
&\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*D^2b) + (Db)^*\left\{g(y)-\sigma_f(y)\sigma_p(y)^{-1}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})\right.\\
&\qquad \left.-\sigma_f(y)\sigma_f(y)^*\frac{Da}{a}\right\} + \frac{1}{2}\left(\mu(y)-r(y)\mathbf{1}-\sigma_p(y)\sigma_f(y)^*\frac{Da}{a}\right)^*\\
&\qquad \cdot(\sigma_p(y)\sigma_p(y)^*)^{-1}\left(\mu(y)-r(y)\mathbf{1}-\sigma_p(y)\sigma_f(y)^*\frac{Da}{a}\right) + ca\\
&\qquad -\lambda\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{a(s,y)z}-1\right)\nu(dz) = 0, \quad b(T,y)=0.
\end{aligned}$$

最終的に次の定理が得られる。

Theorem 0.1. **(A1)** ∼ **(A4)** を仮定する。 さらに、次も仮定する。

(A5) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{C_0 z}\nu(dz) < \infty \quad \exists C_0 > 0.$

このとき、

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_t := \tilde{\pi}(t, X_t^{\tilde{\pi}}, Y_t) =&(\sigma_p(Y_t)\sigma_p(Y_t)^*)^{-1}\left[\sigma_p(Y_t)\sigma_f(Y_t)^*\frac{Da(t,Y_t)}{a(t,Y_t)}\left(-X_t^{\tilde{\pi}} + \frac{1}{a(t,Y_t)}\right)\right.\\
&\left.+\frac{\mu(Y_t)-r(Y_t)\mathbf{1}-\sigma_p(Y_t)\sigma_f(Y_t)^*Db(t,Y_t)}{a(t,Y_t)}\right]
\end{aligned}$$

は最適戦略で、$V(0,x,y) = \tilde{V}(0,x,y)$ が成り立つ。

参考文献

[1] H. Hata, S.J. Sheu and L.H. Sun (2017) “Expected exponential utility maximization of insurers with a general diffusion factor model : The complete market case.”, preprint.

SECOND ORDER UNBIASED SIMULATION METHOD FOR REFLECTED STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

TATSUKI AKIYAMA, ARTURO KOHATSU-HIGA, AND TOMOOKI YUASA

1. Introduction

次の初期値 $X_0 = x \in [0, \infty)$ である 1 次元反射壁確率微分方程式を考える．

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}L_t, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

ただし，$(W_t)_{t\geq 0}$ は初期値 $W_0 = 0$ である 1 次元 Wiener 過程であり，拡散係数 $\sigma : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は $\sigma \in C_b^2([0, \infty))$ を満たし，一様楕円性を持つとする．この時，次を満たす確率過程 $(X_t(x), L_t(x))_{t\geq 0}$ が存在する．

- $(X_t(x), L_t(x))_{t\geq 0}$ は次を満たす初期値 $(X_0(x), L_0(x)) = (x, 0)$ である非負連続適合過程である．

$$X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(X_s(x))\mathrm{d}W_s + L_t(x), \quad t \geq 0.$$

- $L_\bullet(x) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は非減少関数であり，次を満たす．

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s(x)>0\}}\mathrm{d}L_s(x) = 0, \quad t \geq 0.$$

特に，$(X_t(x), L_t(x))_{t\geq 0}$ を (1.1) の解と呼び，$(L_t(x))_{t\geq 0}$ は $(X_t(x))_{t\geq 0}$ の 0 点での Local time となる．

我々の目的は任意の $T > 0$ に対して，ある数値計算可能な Markov 過程 $(\bar{X}_t^\pi(x))_{t\geq 0}$ を用いて，次を満たす数値計算可能な確率変数 $Z_T(x)$ を構成することである．任意の $f \in L_\infty([0, \infty))$ に対して，

$$\mathbb{E}\left[f(X_T(x))\right] = \mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T^\pi(x))Z_T(x)\right]. \tag{1.2}$$

この時，(1.2) の右辺に対して，直接 Monte Carlo method を用いることで，左辺の近似値を求めることが可能である．このような数値計算手法を Unbiased simulation method と呼ぶ．特に，Monte Carlo method の誤差は $Z_T(x)$ の分散に依存する為，数値計算の意味で精度の高い $Z_T(x)$ を構成することに意味を持つ．

2. First order Unbiased simulation method for RSDEs with Poisson kernel method

任意の $x \in [0, \infty)$，$t > 0$ に対して，次の密度関数 $y \mapsto \bar{p}_t(x, y)$ を持つ確率変数を $\bar{X}_t(x)$ とする．

$$\bar{p}_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2(x)}} \exp\left\{-\frac{|y - x|^2}{2t\sigma^2(x)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2(x)}} \exp\left\{-\frac{|y + x|^2}{2t\sigma^2(x)}\right\}, \quad y \in [0, \infty).$$

この時，初期値 $\bar{X}_0(x) = x$ とする Markov 過程 $(\bar{X}_t(x))_{t\geq 0}$ は $(X_t(x))_{t\geq 0}$ の近似過程である．実際，$(\bar{X}_t(x))_{t\geq 0}$ は Order $T^{1/2}$ の近似過程であり（see (2.1) with $\mu = 0$），この近似過程を用いることで，(1.2) を満たす確率変数 $Z_T(x)$ を構成することが可能である．

Theorem 2.0.1. 任意の $x \in [0, \infty)$，$T > 0$，$f \in L_\infty([0, \infty))$，$\lambda > 0$，$\mu \geq 0$ に対して，次を満たす．

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu T^{1/2}} f(X_T(x))\right] - \mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\mu s^{1/2}} \mathbb{E}\left[f(X_s(\bullet))\right]|_{\bullet=\bar{X}_{T-s}(x)Y} \theta_{T-s}^T(x, \bar{X}_{T-s}(x)Y)\mathrm{d}s\right].$$

ただし，Y は $(W_t)_{t\geq 0}$ と独立な *Bernoulli* 分布に従う確率変数であり，任意の $x, z \in [0, \infty)$，$0 < t \leq r \leq T$ に対して，確率変数 $\theta_t^r(x, zY)$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}\theta_t^r(x, zY) = {} & \mathbb{P}\left(Y = 1\right)^{-1} \left(2^{-1}\mu(r - t)^{-1/2}\bar{p}_t(x, zY) + 2^{-1}\partial_y^2(\sigma^2(y)\bar{p}_t(x, y))|_{y=zY} - \partial_t\bar{p}_t(x, zY)\right) \bar{p}_t(x, zY)^{-1}Y \\ & + \mathbb{P}\left(Y = 0\right)^{-1} 2^{-1}\partial_y(\sigma^2(y)\bar{p}_t(x, y))|_{y=0}(1 - Y).\end{aligned}$$

Department of Mathematical Sciences Ritsumeikan University 1-1-1 Nojihigashi, Kusatsu, Shiga, 525-8577, Japan.

特に，ある定数 $C>0$ が存在して，次を満たす.

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left|\mathbb{E}\left[e^{\mu T^{1/2}}f(X_T(x))\right]-\mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\right]\right|\le Ce^{\mu T^{1/2}}T^{1/2}. \tag{2.1}$$

さらに，次で与えられる $Z_T(x)\in L_1(\Omega)$ は (1.2) を満たす.

$$Z_T(x)=\mathbf{1}_{\{N_T=0\}}+\mathbf{1}_{\{N_T>0\}}e^{\lambda T-\mu T^{1/2}}\prod_{i=0}^{N_T-1}\lambda^{-1}\theta^{T-\tau_i}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(\bar{X}^{\pi}_{\tau_i}(x)Y_i,\bar{X}^{\pi}_{\tau_{i+1}}(x)Y_{i+1}).$$

ただし，$(N_t)_{t\ge0}$ は初期時刻 $\tau_0\equiv0$ の点過程 $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ から生成される変数 λ を持つ *Poisson* 過程であり，$(\bar{X}^{\pi}_t(x))_{t\ge0}$ は $\mathbb{P}(\bar{X}^{\pi}_t(x)\in dz|\bar{X}^{\pi}_s(x)=y)=\bar{p}_{t-s}(y,z)dz$ を満たす *Markov* 過程である．また，$Y_0\equiv1$ であり，$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は Y と同分布な独立確率変数列である．さらに，$(W_t)_{t\ge0}$，$(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$，$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は全て独立とする.

3. Second order Unbiased simulation method for RSDEs with Poisson kernel method

Local time が付随しない場合，Theorem 2.0.1 で与えられる確率変数 $Z_T(x)$ の分散は有限になるとは限らない（Lemma 5.4 in [2]）．ただし，点過程を取り替えることで，$Z_T(x)$ の全ての Moment を有限にすることが可能である（Section 7 in [2]）．さらに，(2.1) の Order を改善することで，点過程を取り替えずに（Poisson 過程の状態で）$Z_T(x)$ の全ての Moment を有限にすることが可能である（Theorem 3.3.3 in [3]）．また，Poisson kernel method（e.g.[4]）を適用することで，“Efficiency”が改善される（Section 4.3 in [3]）.

そこで，(2.1) の Order を改善し，$Z_T(x)$ の再構成を行う．実際，任意の $x,z\in[0,\infty)$，$t>0$ に対して，

$$\bar{\eta}_t(x,z):=\int_0^t\left(\sigma'(x)\int_0^\infty\left(\bar{p}^x_s(y,z)\partial_y\bar{p}_{t-s}(x,y)-(y-x)\bar{p}^x_s(y,z)\partial^2_y\bar{p}_{t-s}(x,y)\right)\mathrm{d}y+2\sigma'(0)\bar{p}_s(0,z)g_{(t-s)\sigma^2(x)}(x)\right)\mathrm{d}s$$

とすると，$\bar{\eta}_t(x,z)\bar{p}_t(x,z)^{-1}$（called extra term in Remark 3.1 of [3]）は Order $e^{\mu T}T$ の展開を導く．ただし，$g_{t\sigma^2(x)}(z)=(2\pi t\sigma^2(x))^{-1/2}\exp\{-\frac{z^2}{2t\sigma^2(x)}\}$ であり，$\bar{p}^x_t(y,z)=g_{t\sigma^2(x)}(z-y)+g_{t\sigma^2(x)}(z+y)$ である.

Theorem 3.0.1. 任意の $x\in[0,\infty)$，$T>0$，$f\in L_\infty([0,\infty))$，$\lambda>0$，$\mu\ge0$ に対して，次を満たす.

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu T}f(X_T(x))\right]-\mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\left(1+\frac{\bar{\eta}_T(x,\bar{X}_T(x))}{\bar{p}_T(x,\bar{X}_T(x))}\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\mu s}\mathbb{E}\left[f(X_s(\bullet))\right]|_{\bullet=\bar{X}_{T-s}(x)Y}\theta_{T-s}(x,\bar{X}_{T-s}(x)Y)\mathrm{d}s\right].$$

任意の $x,z\in[0,\infty)$，$0<t\le T$ に対して，確率変数 $\theta_t(x,zY)$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned}\theta_t(x,zY)=&\ \mathbb{P}(Y=1)^{-1}\left(\mu\bar{q}_t(x,zY)+2^{-1}\partial^2_y(\sigma^2(y)\bar{q}_t(x,y))|_{y=zY}-\partial_t\bar{q}_t(x,zY)\right)\bar{p}_t(x,zY)^{-1}Y\\&+\mathbb{P}(Y=0)^{-1}\,2^{-1}\partial_y(\sigma^2(y)\bar{q}_t(x,y))|_{y=0}(1-Y).\end{aligned}$$

ただし，$\bar{q}_t(x,y)=\bar{p}_t(x,y)+\bar{\eta}_t(x,y)$ である．特に，ある定数 $C>0$ が存在して，次を満たす.

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left|\mathbb{E}\left[e^{\mu T}f(X_T(x))\right]-\mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T(x))\left(1+\frac{\bar{\eta}_T(x,\bar{X}_T(x))}{\bar{p}_T(x,\bar{X}_T(x))}\right)\right]\right|\le Ce^{\mu T}T.$$

さらに，次で与えられる $Z_T(x)\in\cap_{p>0}L_p(\Omega)$ は (1.2) を満たす.

$$Z_T(x)=\mathbf{1}_{\{N_T=0\}}+\mathbf{1}_{\{N_T>0\}}e^{(\lambda-\mu)T}\left(1+\frac{\bar{\eta}_{T-\tau_{N_T}}(\bar{X}^{\pi}_{\tau_{N_T}}(x)Y_{N_T},\bar{X}^{\pi}_T(x))}{\bar{p}_{T-\tau_{N_T}}(\bar{X}^{\pi}_{\tau_{N_T}}(x)Y_{N_T},\bar{X}^{\pi}_T(x))}\right)\prod_{i=0}^{N_T-1}\lambda^{-1}\theta_{\tau_{i+1}-\tau_i}(\bar{X}^{\pi}_{\tau_i}(x)Y_i,\bar{X}^{\pi}_{\tau_{i+1}}(x)Y_{i+1}).$$

ただし，Y，$(N_t)_{t\ge0}$，$(\bar{X}^{\pi}_t(x))_{t\in\pi}$，$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は *Theorem 2.0.1* と同一である.

References

[1] A. Alfonsi, M. Hayashi and A. Kohatsu-Higa. Parametrix methods for one dimensional SDEs with reflecting boundary conditions. Preprint.

[2] P. Andersson and A. Kohatsu-Higa. Unbiased simulation of stochastic differential equations using parametrix expansions. *Bernoulli*, 23(3):2028-2057, 2017.

[3] P. Andersson, A. Kohatsu-Higa and T. Yuasa. Second order probabilistic parametrix method for unbiased simulation of stochastic differential equations. Preprint.

[4] N. Chen and Z. Huang. Brownian measures, importance sampling and unbiased simulation of diffusion extremes. *Oper. Res. Lett.*, 40(6):554-563, 2012.